F) Fiche : Intégration.

1) Propriétés de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux (Chasles, linéarité, parités, aires).

Relation de Chasles : $\int_a^\lambda f(x)dx + \int_\lambda^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$.

Linéarité : $\alpha.\int_a^b f(x)dx + \beta.\int_a^b g(x)dx = \int_a^b (\alpha.f + \beta.g)(x)dx$.

Parités : $\int_{-a}^a f(x)dx = \{2.\int_0^a f(x)dx$ si f est paire, 0 si elle est impaire$\}$.

Aire : Si f positive sur $[a, b]$, l'aire délimitée par la courbe, l'axe Ox et les deux droites $(x = a)$, $(x = b)$ est : $\int_a^b f(x)dx$.

2) Intégrales et inégalités. Inégalité de la moyenne.

Inégalités : $f \leq g$ sur $[a, b]$ $\Rightarrow$ $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

Conséquence : $(0 \leq f$ continue et $\int_a^b f(x)dx = 0)$ $\Rightarrow$ $f = 0$.

Inégalité de la moyenne : $(a < b$ et$)$ $m \leq f \leq M$ et f continue par morceaux sur $[a, b]$ $\Rightarrow$
$m(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b - a)$.

Cauchy Schwarz : f et g continues par morceaux sur $[a, b]$ $\Rightarrow$ $|\int_a^b f(x)g(x)dx|^2 \leq \int_a^b |f(x)|^2dx.\int_a^b |g(x)|^2dx$.

Valeurs absolues : f continue par morceaux sur $[a, b]$ $\Rightarrow$ $\boxed{|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx.}$

- *Remarque* : Si f est continue par morceaux sur un intervalle I, $a \in I$ donné, et $x \in I$:

$\int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a, et : $(\int_a^x f(t)dt)' = f(x)$.

3) Intégration par parties. Changement de variable.

Intégration par parties : u et v dérivables sur $[a, b]$ $\Rightarrow$ $\int_a^b uv'dx = [uv]_a^b - \int_a^b u'vdx$.

Changement de variable : Soit $u = \phi(x)$ une fonction de x de classe C^1 sur $[a, b]$, à valeurs dans un intervalle sur lequel f est continue. Alors :

$$\boxed{\int_a^b f(\phi(x)).\phi'(x)dx = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(u)du.}$$

4) Intégrale d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$ (+ exemple de l'exponentielle de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$).

La linéarité sert de définition : $\int_a^b (x(t) + iy(t))dt = \int_a^b x(t)dt + i.\int_a^b y(t)dt$.

Cas particulier d'une fonction f admettant une primitive F dans un disque contenant a et b :

$$\int_a^b f(z)dz = F(b) - F(a)$$ (y compris si a et b sont complexes).

Exemple : $\int_{1-i\pi}^{1+i\pi} e^z dz = e^{1+i\pi} - e^{1-i\pi} = 0$.

5) **Intégrale généralisée** : définition, relation de Chasles, linéarité (extension aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$), lien avec la prolongation d'une primitive par continuité.

Condition nécessaire d'intégrabilité sur un intervalle I : Être continue par morceaux sur tout segment inclus dans I, donc : ÊTRE CONTINUE PAR MORCEAUX SUR I.

Définition : $\int_a^b f(t)dt$ converge (a et b peuvent être infinis) $\Leftrightarrow \lim_{(x,\, y)\to(a,\, b)} \int_x^y f(t)dt$ existe finie.

Proposition : Si f est prolongeable par continuité en a et b, ou si elle possède une primitive F qui l'est, alors l'intégrale converge.

Linéarité : Il est interdit de séparer une intégrale convergente en deux intégrales divergentes (ça peut parfois se produire lors d'une intégration par parties) ; tout le reste est autorisé avec les règles suivantes :

La somme de deux intégrales convergentes est convergente.
La somme d'une intégrale convergente et d'une intégrale divergente est divergente.

On s'en sert ensuite comme définition pour une fonction à valeurs complexes.

Relation de Chasles : Il y a la même restriction (on est donc sûr qu'on peut l'appliquer pour $\lambda \in]a, b[$, cela sert même de définition s'il y a un problème en λ).

6) Convergence par majoration, divergence par minoration.

Si $f \leq g$ sur $]a, b[$ alors : $\int_a^b f(x)dx$ diverge vers $+\infty \Rightarrow \int_a^b g(x)dx$ diverge vers $+\infty$.

Si $0 \leq f \leq g$ sur $]a, b[$ alors : $\int_a^b g(x)dx$ converge $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ converge avec $0 \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

Proposition : Si l'intégrale d'une fonction positive diverge, c'est nécessairement vers $+\infty$.

- *Proposition* : Si f est continue par morceaux sur $[a, +\infty[$, avec $\lim_{x\to\infty} f(x) \neq 0$, alors : $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est divergente.

- ***Fonctions de référence*** : • $\alpha > 1 \Leftrightarrow \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ convergente. • $\alpha < 1 \Leftrightarrow \int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ convergente.
• $\alpha > 0 \Leftrightarrow \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}dt = 1/\alpha$ convergente. • $\int_0^1 \ln(t)dt = -1$ convergente.

7) Convergence d'une intégrale par utilisation de fonctions équivalentes.

f et g continues et de signe constant sur $]a, \lambda]$ et $f \sim g$ quand $x \to a \Rightarrow$

$$\int_a^\lambda f(x)dx \text{ et } \int_a^\lambda g(x)dx \text{ sont de même nature.}$$

f et g continues et de signe constant sur $[\lambda, b[$ et $f \sim g$ quand $x \to b \Rightarrow$

$$\int_\lambda^b f(x)dx \text{ et } \int_\lambda^b g(x)dx \text{ sont de même nature.}$$

Il convient donc lorsqu'il y a un problème aux deux bornes de séparer l'intégrale en deux parties et de traiter chaque cas séparément.

8) Convergence absolue.

f vérifiant la condition nécessaire d'intégrabilité sur $]a, b[$ y admet une intégrale absolument convergente si et seulement si : $\int_a^b |f(x)|dx$ converge.

Proposition : Toute intégrale absolument convergente est convergente.

- *Applications* : • S'il existe une fonction continue par morceaux g telle que $|f| \leq g$ sur $]a, b[$; alors :

$$\int_a^b g(x)dx \text{ converge} \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \text{ converge.}$$

• Si f vérifie est continue par morceaux sur $]a, b]$ et s'il existe une fonction continue par morceaux g telle que $|f| \sim g$ au voisinage de a et si λ est un élément de l'intervalle contenant a de la subdivision commune à f et g, alors :

$$\int_a^\lambda g(x)dx \text{ converge} \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \text{ converge.}$$

9) Fonctions intégrables, propriétés (linéarité, Chasles, inégalités), inégalité de la moyenne.

f continue par morceaux sur un intervalle I y est intégrable si et seulement si f admet sur I une intégrale absolument convergente. On appelle alors intégrale de f sur I son intégrale, impropre ou non selon les cas, et on la note : $\int_I f(t)dt$, ou plus simplement : $\int_I f$.

Relation de Chasles, si $\mathrm{card}(I \cap J) \leq 1$: $\int_I f + \int_J f = \int_{I \cup J} f$.

Linéarité : $\int_I (\alpha.f + \beta.g) = \alpha.\int_I f + \beta.\int_I g$. Dans $\mathbb{C}$: $\int_I (x + iy) = \int_I x + i.\int_I y$ (x et y fonctions de t).

Inégalités : $0 \leq f$ sur $I \Rightarrow 0 \leq \int_I f$;
$(f \leq g$ sur $I \Rightarrow \int_I f \leq \int_I g)$; $(\int_I |fg|)^2 \leq \int_I |f|^2.\int_I |g|^2$.

Inégalité de la moyenne : $|\int_I f| \leq \int_I |f|$.

10) Changement de variable.

Soit f intégrable sur I et une bijection ϕ de classe C^1 d'un intervalle J sur I ; alors :

$$\boxed{\int_I f = \int_J f\circ\phi.|\phi'|.}$$

Remarque : Si ϕ est croissante la valeur absolue est simplement inutile. Si ϕ est décroissante, $|\phi'| = -\phi'$; le signe $-$ vient juste d'une inversion de bornes.

11) **Intégrale dépendant d'un paramètre.**

Soit une application $g : I\times J \to \mathbb{K}$ (I et J intervalles) telle que pour tout réel $x \in I$, $g(x, t)$ est intégrable sur J. Alors, la fonction f définie par : $f(x) = \int_J g(x, t)dt$ est dite définie par une « *intégrale dépendant d'un paramètre* » (le paramètre est x).

12) Théorème de continuité sous le signe $\int$:

Hypothèses : Soit I et J deux intervalles réels et $g : I\times J \to \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ continue par rapport à x et continue par morceaux par rapport à t. S'il existe une fonction positive ϕ continue par morceaux intégrable sur J telle que : $\forall (x, t) \in I\times J,\ |g(x, t)| \le \phi(t)$ (*hypothèse de domination*).

Conclusion : Alors la fonction f définie par $f(x) = \int_J g(x, t)dt$ est continue sur I.

13) Dérivabilité sous le signe $\int$:

Hypothèses : Soit I et J deux intervalles réels et $g : I\times J \to \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ dérivable par rapport à x. On suppose que : $\forall x \in I$, les fonctions $(t \mapsto g(x, t))$ et $(t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t))$ sont continues par morceaux et intégrables sur J. S'il existe une fonction ϕ continue par morceaux et intégrable sur J telle que :

$$\forall (x, t) \in I\times J,\ \left|\frac{\partial g}{\partial x}(x, t)\right| \le \phi(t).$$

- *Remarque* : Cette inégalité prouve l'intégrabilité de $\frac{\partial g}{\partial x}$, il est donc inutile de le prouver deux fois.

Conclusion : Alors la fonction f définie par $f(x) = \int_J g(x, t)dt$ est de classe C^1 sur I, avec :

$$f'(x) = \int_J \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)dt \quad \text{(formule de Leibniz).}$$

14) Remarque : Dans les deux théorèmes, la fonction de domination ϕ ne doit pas dépendre de x, elle peut donc être un peu difficile à obtenir. Pour cette raison, il est possible de se limiter à la domination dans toute partie $K\times J$ où K est un segment contenu dans I.