G) Déterminants.

1) <u>Formes n-linéaires alternées</u>.

Soit $E = \mathbb{K}^n$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors toute famille de plus de m vecteurs, au sens strict, est liée, et toute famille libre possède moins de m vecteurs, au sens large.

L'application $\phi:(E^n \to \mathbb{K})$ est une forme n-linéaire sur E si et seulement si les applications partielles sont linéaires.

Étant donnée la famille $(u_1, u_2, ..., u_n)$, on note ϕ_k la k-ième application partielle, $\phi_k:(E \to \mathbb{K})$:

$$\phi_k(u) = \phi(u_1, u_2, ..., u_{k-1}, u, u_{k+1}, ..., u_n).$$

- *Propriété* : Si l'un des vecteurs de la famille $(u_1, u_2, ..., u_n)$ est nul, alors $\phi(u_1, u_2, ..., u_n) = 0$.

- *Preuve* : Par exemple u_n ; alors : $\phi(u_1, u_2, ..., u_{n-1}, 0_E) = \phi(u_1, u_2, ..., u_{n-1}, 0.0_E) = 0.\phi(u_1, u_2, ..., u_{n-1}, 0_E) = 0$.t

On dit que :

ϕ est alternée si et seulement si : $u_i = u_j \Rightarrow \phi(u_1, u_2, ..., u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, ..., u_{j-1}, u_i, u_{j+1}, ..., u_n) = 0$. $(\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ i \neq j)$.

- *Proposition* : Soit ϕ une forme n-linéaire et $\phi_{i,j}$ la forme bilinéaire définie, pour $i < j$ par :

$$\phi_{i,j}(x, y) = \phi(u_1, ..., u_{i-1}, x, u_{i+1}, ..., u_j, y, u_{j+1}, ..., u_n).$$

Alors : ϕ alternée $\Leftrightarrow$ $\phi_{i,j}$ antisymétrique pour tout couple $(i, j) \in [\![1, n]\!]$, $i < j$ (cf. ch. C §16).

- *Preuve* : Si ϕ est une forme n-linéaire alternée, alors : $0 = \phi(u_1, ..., u_{i-1}, u_i + u_j, u_{i+1}, ..., u_{j-1}, u_i + u_j, u_{j+1}, ..., u_n)$ est égal, en appliquant la linéarité, à une somme de quatre termes dont deux sont nuls car ayant deux fois u_i ou deux fois u_j ; il reste alors le résultat souhaité, à savoir : $\phi(u_1, ..., u_{i-1}, u_j, u_{i+1}, ..., u_{j-1}, u_i, u_{j+1}, ..., u_n) + \phi(u_1, u_2, ..., u_n) = 0$. Réciproquement, si le fait d'échanger deux vecteurs change le signe, pour $u_i = u_j$, on a : $\phi(u_1, u_2, ..., u_n) = \phi(u_1, ..., u_{i-1}, u_j, u_{i+1}, ..., u_{j-1}, u_i, u_{j+1}, ..., u_n) = -\phi(u_1, u_2, ..., u_n)$, d'où $\phi(u_1, u_2, ..., u_n) = 0$, on a bien une forme alterné.

- *Échange* : Échanger deux vecteurs s'appelle « appliquer une transposition » à la famille ordonnée de n vecteurs : $A = (u_1, ..., u_n)$, ce qui a pour conséquence de changer le signe de son image par la forme multilinéaire alternée.

2 <u>Définition du déterminant</u>

- ***Théorème*** : Toutes les formes n-linéaires alternées sont proportionnelles.

Cela veut dire que si la forme n-linéaire alternée ϕ n'est pas l'application nulle, alors toute forme n-linéaire alternée ψ est telle que $\psi = k.\phi$, où k est un scalaire.

- *Définition* : Le déterminant d'une famille A de n vecteurs dans une base B est la forme linéaire alternée qui prend la valeur 1 sur B, notée $\det_B(A)$ avec $\det_B(B) = 1$.

- *Proposition* : $(u_1, u_2, ..., u_n)$ est une famille liée $\Leftrightarrow$ $\det_B(u_1, u_2, ..., u_n) = 0$.

$(u_1, u_2, ..., u_n)$ est une famille libre $\Leftrightarrow$ $\det_B(u_1, u_2, ..., u_n) \neq 0$.

- *Preuve* : Si $A = (u_1, u_2, ..., u_n)$ est une famille liée, alors il existe une combinaison linéaire nulle ayant au moins un coefficient non nul, ce qui signifie que l'un des vecteurs est combinaison linéaire des autres ; par exemple : $u_n = \alpha_1.u_1 + \alpha_2.u_2 + ... + \alpha_{n-1}.u_{n-1}$. D'où, grâce à la n-linéarité : $\phi(u_1, u_2, ..., u_{n-1}, \alpha_1.u_1 + \alpha_2.u_2 + ... + \alpha_{n-1}.u_{n-1}) = \alpha_1.\phi(u_1, u_2, ..., u_{n-1}, u_1) + \alpha_2.\phi(u_1, u_2, ..., u_{n-1}, u_2) + ... + \alpha_{n-1}.\phi(u_1, u_2, ..., u_{n-1}, u_{n-1}) = 0$. Si A est libre c'est une base de $Vect(A)$; soit alors $\phi(u_1, u_2, ..., u_{n-1}, u_n) = 0$, et un vecteur quelconque $v_n = \alpha_1.u_1 + \alpha_2.u_2 + ... + \alpha_n.u_n$, on a : $\phi(u_1, u_2, ..., u_{n-1}, v_n) = 0$ en appliquant la linéarité. En appliquant de même la linéarité à toute famille de n vecteurs $(v_1, v_2, ..., v_n)$ de $Vect(A)$, on arrive à : $\phi(v_1, v_2, ..., v_n) = 0$, d'où ϕ est l'application nulle sur $Vect(A)$. Par suite, en appliquant les deux premières on trouve la troisième.

- *Corollaire* : Si on ajoute à l'un des vecteurs de la famille $(u_1, u_2, ..., u_n)$ une combinaison linéaire des autres vecteurs de cette même famille, la valeur de la fonction ne change pas :

$$\phi(u_1, u_2, ..., u_{i-1}, u_i + \sum_{k \neq i} \alpha_k.u_k, u_{i+1}, ..., u_n) = \phi(u_1, u_2, ..., u_n).$$ (Il suffit une nouvelle fois d'appliquer la linéarité).

- *Formule de changement de base* : Soit $B = (e_1, e_2, ..., e_n)$ et $B' = (e'_1, e'_2, ..., e'_n)$ de $E = \mathbb{K}^n$; pour toute famille $(u_1, u_2, ..., u_n)$ de E : $\det_{B'}(u_1, u_2, ..., u_n) = \det_{B'}(B).\det_B(u_1, u_2, ..., u_n)$.

- *Preuve* :Les formes linéaires $\det_B$ et $\det_{B'}$ sont proportionnelles, il existe donc un scalaire k tel que $\det_{B'} = k.\det_B$. On obtient l'expression de k en donnant l'image de B : $\det_{B'}(B) = k.\det_B(B) = k$, d'où la formule de changement de base.

- *Remarque* : $\det_{B'}(B).\det_B(B') = 1$.

- *Proposition* : Si f est un endomorphisme de E, $\det(f) = \det_B(f(B))$ ne dépend pas de la base B choisie. Alors : $\det_B(f(A)) = \det(f).\det_B(A)$.

• Si M est la matrice de f dans la base B alors : $\det(M) = \det(f)$ ne dépend pas non plus de la base dans laquelle on exprime f.

- *Preuve* : La forme linéaire $\phi(A) = \det_B(f(A))$ est proportionnelle au déterminant dans B, donc égale à : $k.\det_B(A)$, et au déterminant dans B', donc : $\phi(A) = k'.\det_{B'}(A)$. On applique à B : $\phi(B) = \det_B(f(B)) = k = k'.\det_{B'}(B)$; on applique à B' : $\phi(B') = \det_B(f(B')) = k'$. Avec la formule de changement de base : $\det_{B'}(f(B')) = \det_{B'}(B).\det_B(f(B')) = \det_{B'}(B).k' = k$, donc : $k = \det_B(f(B)) = \det_{B'}(f(B'))$.

On peut donc le noter plus simplement $\det(f)$, et alors, comme $k = \det(f)$: $\phi(A) = \det_B(f(A)) = k.\det_B(A) = \det(f).\det_B(A)$.

On en déduit, comme il est écrit dans le tableau qui suit : $\det(f \circ g) = \det_B((f \circ g)(B)) = \det_B(f(g(B))) = \det(f).\det_B(g(B)) = \det(f).\det(g)$. Si f est bijective, alors : $\det(f).\det(f^{-1}) = \det(f \circ f^{-1}) = \det_B((f \circ f^{-1})(B)) = \det_B(f(f^{-1}(B))) = \det_B(B) = 1$; donc : $\det(f^{-1} \circ g \circ f) = \det(g)$. Si P est la matrice de f et M celle de g dans B, alors : $\det(P^{-1}.M.P) = \det(M)$; il en résulte que le déterminant de la matrice d'un endomorphisme ne dépend pas de la base dans laquelle la matrice est donnée.

- *Conséquence* : Deux matrices semblables ont le même déterminant.

- *Preuve* : Il existe une matrice inversible P telle que $N = P.M.P^{-1}$; d'où $\det(N) = \det(P.M.P^{-1}) = \det(P).\det(M).\det(P^{-1}) = \det(M)$ (en appliquant la propriété dans le tableau suivant sur les produits matriciels).

Propriétés : Soit B la base canonique, A une famille de n vecteurs, et α un scalaire.

A base de $E \Leftrightarrow \det_B(A) \neq 0$	f automorphisme $\Leftrightarrow \det(f) \neq 0$	M inversible $\Leftrightarrow \det(M) \neq 0$
	$\det(f \circ g) = \det(f).\det(g)$	$\det(M.N) = \det(M).\det(N)$
$\det_B(B) = 1$	$\det(id_E) = 1$	$\det(I) = 1$
	Si f bijective : $\det(f^{-1}) = 1/\det(f)$	Si M inversible : $\det(M^{-1}) = 1/\det(M)$
$\det_{B'}(A) = \det_{B'}(B).\det_B(A)$	$\det_B(f(A)) = \det(f).\det_B(A)$	$\det({}^tM) = \det(M)$, $\det(\alpha.M) = \alpha^n.\det(M)$

- *Preuves* : f est un automorphisme si et seulement si $f(B)$ est une famille libre.
Déjà donnée précédemment : $\det(f \circ g) = \det_B((f \circ g)(B)) = \det_B(f(g(B))) = \det(f).\det_B(g(B)) = \det(f).\det(g)$.
$\det(id_E) = \det_B(B) = 1 = \det(f \circ f^{-1}) = \det(f).\det(f^{-1})$, d'où le résultat.
$\det(I) = \det(id_E) = 1 = \det(M.M^{-1}) = \det(M).\det(M^{-1})$, d'où le résultat.

- *Autre écriture du produit matriciel* :

Soit $P = (\alpha_{i,k})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le k\le q}}$ et $M = (a_{k,j})_{\substack{1\le k\le q\\ 1\le j\le p}}$; on note les lignes de M : $L_k = (a_{k,j})_{1\le j\le p}$. Alors :

$$PM = P.\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1}.L_1 + \alpha_{1,2}.L_2 + \ldots + \alpha_{1,q}.L_q \\ \alpha_{2,1}.L_1 + \alpha_{2,2}.L_2 + \ldots + \alpha_{2,q}.L_q \\ \vdots \\ \alpha_{n,1}.L_1 + \alpha_{n,2}.L_2 + \ldots + \alpha_{n,q}.L_q \end{pmatrix}.$$

Conséquence : Si P est inversible (donc $q = n$), $\det(M) = \dfrac{1}{\det(P)}.\begin{vmatrix} \alpha_{1,1}.L_1 + \alpha_{1,2}.L_2 + \ldots + \alpha_{1,n}.L_n \\ \alpha_{2,1}.L_1 + \alpha_{2,2}.L_2 + \ldots + \alpha_{2,n}.L_n \\ \vdots \\ \alpha_{n,1}.L_1 + \alpha_{n,2}.L_2 + \ldots + \alpha_{n,n}.L_n \end{vmatrix}$.

3) Cas initiaux ($n \le 3$).

$n = 1$: $\det(x) = x$.

$n = 2$: $\det\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$.

- *Remarques* : Si u et v sont deux vecteurs du plan, alors :

$(u|v) = ||u||.||v||.\cos(\widehat{u,v})$, et : $\det(u, v) = ||u||.||v||.\sin(\widehat{u,v})$.

Si $[AB]$ et $[AC]$ sont les côtés d'un parallélogramme, alors $|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})|$ est son aire.

$n = 3$: • Règle de Sarrus : on recopie les deux premières lignes sous le déterminant, on fait les produits de trois termes en assignant un signe + aux diagonales descendantes et un signe - aux diagonales montantes :

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 - x_3y_2z_1 - x_1y_3z_2 - x_2y_1z_3.$$

- • Méthode du produit vectoriel : $\det(u_1, u_2, u_3) = (u_1|u_2\wedge u_3) = (u_1\wedge u_2|u_3)$;

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = x_1.\begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - x_2.\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} + x_3.\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} = z_1.\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} - z_2.\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + z_3.\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

On appelle aussi cette forme le *produit mixte*. Si $[AB]$, $[AC]$, $[AD]$ sont les arêtes d'un parallélépipède, alors $|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})|$ est la mesure du volume du parallélépipède.

- *Remarque* : $\det(u, v, u\wedge v) = (u\wedge v|u\wedge v) = ||u\wedge v||^2 = ||u||^2.||v||^2.\sin^2(\widehat{u,v})$.

- *Exemples* : Avec Sarrus : $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 8 \end{vmatrix} = 1.5.8 + 2.6.7 + 3.4.8 - 3.5.7 - 1.6.8 - 2.4.8 = 3.$

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix}$; $L_1 - L_3/2 \to L_1$, $L_2 - 5L_3/6 \to L_2$: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$; $L_1 - L_2/2 \to L_1$: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 24.$

On peut généraliser la méthode du produit vectoriel avec le développement selon une ligne ou une colonne.

On peut aussi appliquer la méthode du pivot de Gauss exposée dans le paragraphe suivant.

4) Cas général.

• Développement selon une ligne ou une colonne : On choisit une ligne i ou une colonne j du déterminant Δ, et on fait varier l'autre indice ; par exemple on choisit la colonne j et on fait varier i de 1 à n. À chaque coefficient a_{ij} on affecte un signe appelé sa signature égal à $(-1)^{i+j}$ et le déterminant m_{ij} d'ordre $n - 1$ obtenu en supprimant la i-ème ligne et la j-ième colonne de Δ, appelé le mineur de a_{ij}. Alors :

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}m_{ij}.$$

- *Exemple* : $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 8 \end{vmatrix} = 1.\begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} - 2.\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} + 3.\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 1.(-8) - 2.(-10) + 3.(-3) = 3.$

• Méthode du pivot de Gauss : On peut additionner à n'importe quelle ligne ou colonne une combinaison linéaire des autres. *Le but est de faire apparaître des 0 et d'appliquer ensuite la méthode précédente.*

- *Remarque* : Il est possible d'appliquer la méthode du pivot de Gauss[1] indifféremment aux lignes ou aux colonnes (on peut commencer par traiter une colonne, puis continuer par une ligne, et alterner ou non autant de fois qu'on le souhaite).

- *Exemple* : Soit $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 8 \end{vmatrix}$; $L_2 - 2L_1 \to L_2$, $L_3 - 3L_1 \to L_3$: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -13 \end{vmatrix} = -3.\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & -13 \end{vmatrix}$; $C_2 - 4C_1 \to C_2$, $C_3 - 7C_1 \to C_3$: $\Delta = -3.\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & -13 \end{vmatrix}$; $L_2 - 2L_1 \to L_2$: $\Delta = -3.\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -1 \end{vmatrix} = 3.\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 1 \end{vmatrix}$; $C_2 + 6C_3 \to C_2$: Finalement $\Delta = 3.\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3$. (En pratique il est possible de faire le calcul plus rapidement en associant plusieurs méthodes (dont celle-ci)).

- *Remarque* : • Si on veut transformer plusieurs lignes ou plusieurs colonnes simultanément, soit on ne multiplie que par des matrices triangulaires ayant des 1 dans la diagonale.

Exemple : Avec $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$, On voudrait faire $\{L_1 + L_2 + L_3 \to L_1 ;\ L_2 - L_1 \to L_2 ;\ L_3 - L_2 \to L_3\}$:

$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} \to (a + b + c).\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b - a & b - c & a - c \\ c - b & a - c & b - a \end{vmatrix}$; mais cela revient à faire le produit :

$\det(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}) = \det(\begin{pmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ b - a & b - c & a - c \\ c - b & a - c & b - a \end{pmatrix})$, d'où le déterminant initial est multiplié par : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3$. Il faut donc éviter de multiplier par une matrice non triangulaire.

(C'est encore plus évident avec la transformation : $\{L_1 - L_2 \to L_1 ;\ L_2 - L_1 \to L_2\}$).

• Soit on utilise la propriété du produit donnée à la fin du paragraphe 2 ; si $P = (\alpha_{i,j})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}}$ est inversible :

$$\begin{vmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_q \end{vmatrix} = \frac{1}{\det(P)}.\begin{vmatrix} \alpha_{1,1}.L_1 + \alpha_{1,2}.L_2 + \ldots + \alpha_{1,n}.L_n \\ \alpha_{2,1}.L_1 + \alpha_{2,2}.L_2 + \ldots + \alpha_{2,n}.L_n \\ \vdots \\ \alpha_{n,1}.L_1 + \alpha_{n,2}.L_2 + \ldots + \alpha_{n,n}.L_n \end{vmatrix}.$$

[1] Karl Friedrich Gauss : 1777-1855.

5) Cas particuliers.

• Le déterminant d'une matrice diagonale ou d'une matrice triangulaire est égal au produit de ses termes diagonaux. (Il s'agit de la diagonale descendante, appelée aussi : principale. La preuve est évidente par linéarité pour une matrice diagonale, et pour une matrice triangulaire il faut préalablement ajouter des combinaisons linéaires aux colonnes pour la transformer en matrice diagonale, c'est la méthode du pivot de Gauss).

- *Méthode* : Avec la méthode du pivot de Gauss, on peut se ramener à une matrice triangulaire dont le produit des coefficients diagonaux vaut $\det(M)$. (*Il n'y a pas unicité, et elle n'est pas en général semblable à M*).

• Déterminant de la comatrice : La comatrice de M est la matrice des cofacteurs ; le cofacteur de $a_{i,j}$ est le produit de la signature par le mineur : $co(a_{i,j}) = (-1)^{i+j}m_{i,j}$, $Co(M) = (co(a_{i,j}))_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$.

- *Proposition* : ${}^tCo(M).M = M.{}^tCo(M) = \det(M).I$.

- *Corollaire* : Si M est inversible, alors : $M^{-1} = \frac{1}{\det(M)}.{}^tCo(M)$.

- *Conséquence* : $\det(Co(M)).\det(M) = \det(M)$; donc, si M inversible : $\det(Co(M)) = 1$.

Et si M non inversible, alors : $\det(Co(M)) = 0$. (Si M est la matrice nulle alors $Co(M)$ aussi, sinon il y a un vecteur colonne C non nul dans M, et alors les n colonnes de $Co(M)$ sont dans $C^{\perp}$ qui est de dimension $n-1$, ce qui implique qu'elles sont liées).

• Cas particulier des matrices d'ordre deux inversibles : $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}.\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$.

• Si M est à coefficients complexes, en notant $\overline{M}$ la matrice dont les coefficients sont les conjugués de ceux de M, alors :

$$\det(\overline{M}) = \overline{\det(M)}\ ;\ Co(\overline{M}) = \overline{Co(M)}\ ;\ {}^t\overline{M} = \overline{{}^tM}\ ;\ \text{si } M \text{ inversible : } \overline{M}^{-1} = \overline{M^{-1}}.$$

• Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs : Si $p + q = n$, que A et C sont des matrices carrées d'ordre respectifs p et q, B une matrice quelconque et Θ une matrice nulle de dimensions convenables, alors :

$\begin{vmatrix} A & \Theta \\ B & C \end{vmatrix} = \det(A).\det(C)$. De même si les dimensions sont convenables : $\begin{vmatrix} A & B \\ \Theta & C \end{vmatrix} = \det(A).\det(C)$.

- *Preuve* : Si A n'est pas inversible alors $\det(A) = 0$ et la famille constituée des vecteurs colonnes de M est liée donc $\det(M) = 0$, ce qui valide la formule. Si A est inversible, alors A^{-1} existe, et on définit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$; il est clair, en le développant selon les dernières lignes, que $\det(N) = \det(A^{-1}) = 1/\det(A)$. En outre : $N.M = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$, donc, en le développant selon les premières lignes : $\det(NM) = \det(C)$. Il s'en suit que $\det(M) = \det(A).\det(C)$.

• Matrice diagonale par blocs : $A_1, A_2, \dots, A_p$ étant des matrices carrées et Θ des matrices nulles (pas forcément de mêmes dimensions),

$$\begin{vmatrix} A_1 & \Theta & \Theta & \dots & \Theta \\ \Theta & A_2 & \Theta & \dots & \Theta \\ \Theta & \Theta & A_3 & \dots & \Theta \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Theta & \Theta & \Theta & \dots & A_p \end{vmatrix} = \det(A_1).\det(A_2)\dots\det(A_p).$$

- *Remarques* : Il est possible d'appliquer ce résultat avec un déterminant contenant une ligne ou une colonne ayant un seul terme non nul :

$$\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

• On peut encore appliquer le principe précédent s'il y a une colonne ou une ligne avec deux éléments grâce à la linéarité :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}.\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + a_{21}.\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 1 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{ ; donc :}$$

$$\Delta = a_{11}.\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{21}.\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$ (le signe "-" vient de la transposition de lignes).

Il est possible de généraliser ce principe à toute la colonne, ou à toute la ligne. Mais, en pratique, ce n'est intéressant que pour les petites dimensions ; lorsqu'on doit calculer un déterminant ayant un nombre indéterminé de lignes et de colonnes, on se limite en général à un ou deux éléments non nuls pour appliquer la linéarité.

- *Signature* : Le nombre de transpositions nécessaires pour amener le terme situé à la i-ème ligne et j-ième colonne jusqu'à la première place est i + j. On peut donc appliquer ce qui précède à une ligne ou une colonne quelconque, à condition de multiplier par $(-1)^{i+j}$:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & 0 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i+j}a_{ij}.\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{(i-1)1} & \dots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)(j+1)} & \dots & a_{(i-1)n} \\ a_{(i+1)1} & \dots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & \dots & a_{(i+1)n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Ce dernier déterminant est appelé le mineur de a_{ij} et noté m_{ij} ; on peut ainsi appliquer la linéarité et développer tout déterminant Δ selon une ligne ou une colonne fixée au départ. Par exemple, en fixant la colonne j :

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}m_{ij}.$$ (On retrouve le résultat du paragraphe 5).

- *Déterminant de Vandermonde* : Étant donnés n scalaires $a_1, a_2, \dots, a_n$; c'est un déterminant de la forme :

$$V(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \dots & a_3^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n}(a_j - a_i).$$

- *Preuve* : Pour $i \ge 2$, $C_i - a_1.C_{i-1} \to C_i$: $V(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a_2 - a_1 & a_2(a_2 - a_1) & \dots & a_2^{n-2}(a_2 - a_1) \\ 1 & a_3 - a_1 & a_3(a_3 - a_1) & \dots & a_3^{n-2}(a_3 - a_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n - a_1 & a_n(a_n - a_1) & \dots & a_n^{n-2}(a_n - a_1) \end{vmatrix}$, en développant selon la première ligne, puis en utilisant la linéarité sur le déterminant d'ordre $n - 1$ obtenu :

$V(a_1, a_2, \dots, a_n) = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)\dots(a_n - a_1).\begin{vmatrix} 1 & a_2 & \dots & a_2^{n-2} \\ 1 & a_3 & \dots & a_3^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^{n-2} \end{vmatrix} = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)\dots(a_n - a_1).V(a_2, \dots, a_n)$. Il ne reste plus qu'à poursuivre le processus de récurrence jusqu'au résultat final.

- *Utilisation d'une indéterminée* : Par exemple, en ajoutant X à tous les éléments d'un déterminants, en appliquant la linéarité sur les colonnes tous les termes ayant deux colonnes ne contenant que des X seront nulles ; il s'en suit que :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta(X) = \begin{vmatrix} a_{11}+X & a_{12}+X & a_{13}+X & \dots & a_{1n}+X \\ a_{21}+X & a_{22}+X & a_{23}+X & \dots & a_{2n}+X \\ a_{31}+X & a_{32}+X & a_{33}+X & \dots & a_{3n}+X \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}+X & a_{n2}+X & a_{n3}+X & \dots & a_{nn}+X \end{vmatrix}, \text{ avec :}$$

$$\Delta(X) = \Delta + X.\left(\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 1 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 1 & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & 1 & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 1 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & 1 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & 1 & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & 1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & 1 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & 1 \end{vmatrix} \right).$$

D'où : $\Delta(X) = \lambda X + \Delta$; il suffit ensuite de donner des valeurs à X pour trouver Δ.

- *Autre exemple* : Un déterminant d'ordre n dont seule la diagonale contient X est un polynôme dont le terme de plus haut degré est donné par le produit de la diagonale : $d°(\det(M + X.I)) = n$.

Il y a ici une propriété intéressante : Si M et M' sont semblables, alors : $\det(M' + X.I) = \det(M + X.I)$.

- *Remarque* : Si les coefficients de la matrice M sont des fonctions affines de X, sans plus de précision, alors :

$$d°(\det(M)) \leq n.$$

- *Déterminant circulant* : Les lignes et colonnes sont le résultat d'une permutation circulaire. Soit :

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_2 & x_3 & x_4 & \dots & x_1 \\ x_3 & x_4 & x_5 & \dots & x_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n & x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_n & x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} \\ x_{n-1} & x_n & x_1 & \dots & x_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n-1} & x_2 & x_3 & \dots & x_1 \end{pmatrix}; \; \Delta = \det(A).$$

Ces deux matrices sont circulantes et les deux déterminants circulants. Le premier peut se déduire du second en appliquant $E((n - 1)/2)$ transpositions sur les lignes (sauf la première, la 2-ième et la n-ième, la 3-ième et la (n-1)-ième, etc...). Il s'en suit que l'on a : $\det(A) = (-1)^{E((n - 1)/2)}.\det(B)$.

- *Première méthode* (mauvaise) : On fait la somme de toutes les colonnes que l'on met à la place de la première et :

$$\Delta = (x_1 + x_2 + \dots + x_n).\begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ 1 & x_3 & x_4 & \dots & x_1 \\ 1 & x_4 & x_5 & \dots & x_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} \end{vmatrix}.$$

- *Deuxième méthode* : Soit P le polynôme défini par $P(X) = x_1 + x_2X + x_3X^2 + \dots + x_nX^{n-1}$; et $\omega_k = e^{2ik\pi/n}$, les racines n-ièmes de l'unité (on note plus simplement : $\omega = \omega_1$). On pose ensuite :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \omega_0 & \omega_1 & \omega_2 & \dots & \omega_{n-1} \\ \omega_0^2 & \omega_1^2 & \omega_2^2 & \dots & \omega_{n-1}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_0^{n-1} & \omega_1^{n-1} & \omega_2^{n-1} & \dots & \omega_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix}, \text{ et } U_k = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega_k \\ \omega_k^2 \\ \dots \\ \omega_k^{n-1} \end{pmatrix}.$$

On montre alors que : $A.U_k = P(\omega_k).U_{-k}$, $B.U_k = P(\omega_k).U_k$, $A.M = \begin{pmatrix} A.U_0 & A.U_1 & A.U_3 & \dots & A.U_{n-1} \end{pmatrix}$ et idem avec $B.M$. On obtient finalement : $\det(B) = P(1).P(\omega).P(\omega^2)\dots P(\omega^{n-1})$.

6) Déterminant de Gram.

Si E est euclidien, la matrice de Gram de la famille $A = (u_1, u_2, ..., u_k)$ est : $G(A) = \begin{pmatrix} (u_1|u_1) & (u_1|u_2) & ... & (u_1|u_k) \\ (u_2|u_1) & (u_2|u_2) & ... & (u_2|u_k) \\ ... & ... & ... & ... \\ (u_k|u_1) & (u_k|u_2) & ... & (u_k|u_k) \end{pmatrix}$.

On appelle déterminant de Gram de A : $\mathrm{gram}(A) = \det(G(A))$.

- *Proposition* : Si $B = (e_1, e_2, ..., e_k)$ est une base orthonormale de $\mathrm{Vect}(A)$, alors :

$\mathrm{gram}(A) = \det_B(A)^2$. (Au passage : $\mathrm{gram}(A) \geq 0$).

- *Preuve* : Soit M la matrice dont les colonnes sont les composantes des u_i dans B ; alors $G(A) = {}^tMM$ donc : $\det(G(A)) = \det(M)^2$.

- *Propriétés* : Les premières propriétés sont des corollaires de la proposition précédente.

Pour tout réel α, $\mathrm{gram}(u_1, u_2, ..., u_{i-1}, \alpha.u_i, u_{i+1}, ..., u_k) = \alpha^2.\mathrm{gram}(u_1, u_2, ..., u_k)$.

$\mathrm{gram}(u_1, u_2, ..., u_{i-1}, u_j, u_{i+1}, ..., u_{j-1}, u_i, u_{j+1}, ..., u_k) = \mathrm{gram}(u_1, u_2, ..., u_k)$.

A famille libre $\Leftrightarrow$ $\mathrm{gram}(A) \neq 0$; A famille liée $\Leftrightarrow$ $\mathrm{gram}(A) = 0$.

Pour tout vecteur v de A : $\mathrm{gram}(u_1, u_2, ..., u_{i-1}, u_i + v, u_{i+1}, ..., u_k) = \mathrm{gram}(u_1, u_2, ..., u_k)$.

Pour tout vecteur v de $A^\perp$: $\mathrm{gram}(u_1, u_2, ..., u_k, v) = \|v\|^2.\mathrm{gram}(u_1, u_2, ..., u_k)$. (Il suffit d'écrire la matrice pour le voir).

$\mathrm{gram}(u_1, u_2, ..., u_{i-1}, u_i + v, u_{i+1}, ..., u_k) = \|v\|^2.\mathrm{gram}(u_1, u_2, ..., u_{i-1}, u_{i+1}, ..., u_k) + \mathrm{gram}(u_1, u_2, ..., u_k)$.

(On écrit la matrice, et on écrit la i-ème colonne comme une somme avec $(0, 0, ..., v^2, ..., 0)$).

Soit p la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(A)$; pour tout vecteur x de E :

$\mathrm{gram}(u_1, u_2, ..., u_k, x) = \mathrm{gram}(u_1, u_2, ..., u_k, x - p(x)) = \|x - p(x)\|^2.\mathrm{gram}(u_1, u_2, ..., u_k)$.

(Corollaires des deux précédentes en écrivant $x = (x - p(x)) + p(x)$).

- *Distance d'un vecteur à un sous-espace*. Pour tout vecteur x de E :

On note $\det_0(A) = 0$ si A est liée, $\det_0(A)$ =le déterminant de A dans la base orthonormale obtenue à partir de A par le procédé de Schmidt sinon (avec la condition de positivité, donc : $\det_0(A) \geq 0$; on pourrait appeler ça le *déterminant euclidien* de A). Alors : $\mathrm{gram}(A) = \det_0(A)^2$ (d'après la première proposition).

Si A est libre : $d(x, \mathrm{Vect}(A)) = \sqrt{\mathrm{gram}(u_1, u_2, ..., u_k, x)/\mathrm{gram}(u_1, u_2, ..., u_k)} = |\det_0(A \cup \{x\})/\det_0(A)|$.

(C'est un corollaire de la dernière propriété ci-dessus).

L'avantage du déterminant de Gram sur le déterminant de la famille dans une base orthonormale de $\mathrm{Vect}(A)$ consiste dans le fait qu'il n'y a pas besoin de connaître cette base ; on peut le calculer en connaissant seulement les coordonnées des u_i dans la base de E considérée.

- *Composantes d'un vecteur de Vect(A) dans A* : Si A est libre, on peut connaître les coordonnées d'un vecteur quelconque de $\mathrm{Vect}(A)$ dans A au signe près. Soit $u = x_1.u_1 + x_2.u_2 + ... x_k.u_k$; alors :

$\mathrm{gram}(u_1, u_2, ..., u_{i-1}, u, u_{i+1}, ..., u_k) = x_i^2.\mathrm{gram}(A)$, d'où : $x_i = \pm\sqrt{\mathrm{gram}((A \cup \{u\}) \setminus \{u_i\})/\mathrm{gram}(A)}$.

- *Remarque* : On peut ainsi retrouver les formules de projection du chapitre C. En effet, si la base B est orthonormale, alors : $x_i = \pm\det_B(u_1, u_2, ..., u_{i-1}, u, u_{i+1}, ..., u_k)/\det_B(u_1, ..., u_k)$. Avec l'écriture matricielle, en écrivant des majuscules pour les matrices colonnes des composantes des vecteurs dans B, et en notant $Co(U_i)$ la colonne des cofacteurs de la colonne U_i de la matrice $(U_1\ U_2\ ...\ U_k)$, et en développant le déterminant du numérateur selon la colonne U : $p_i(u) = x_iu_i$ avec $x_i.U_i = \pm({}^tCo(U_i).U).U_i/\det(U_1\ ...\ U_k)$. Donc, en notant M_i la matrice de p_i dans B, et comme ${}^tCo(U_i).U$ est une matrice d'ordre 1 (donc elle permute) :

$M_i.U = \pm U_i.({}^tCo(U_i).U)/\det(U_1\ ...\ U_k) = \pm(U_i.{}^tCo(U_i)).U/\det(U_1\ ...\ U_k)$, d'où : $M_i = \pm U_i.{}^tCo(U_i)/\det(U_1\ ...\ U_k)$, où l'on a vu dans le chapitre C que le signe convenable était $M_i = U_i.{}^tCo(U_i)/det(U_1\ ...\ U_k)$.

- *Conclusion* : $x_i = \pm\sqrt{gram((A\cup\{u\})\setminus\{u_i\})/gram(A)} = det_B(u_1, u_2, ..., u_{i-1}, u, u_{i+1}, ..., u_k)/det_B(u_1, ..., u_k)$.

- Cas initiaux :

Si $k = 1$: $gram(u) = ||u||^2$.

Si $k = 2$: $gram(u, v) = ||u||^2||v||^2 - (u|v)^2$. Dans le cas particulier où $dim(E) = 3$: $gram(u, v) = ||u\wedge v||^2$.

- *Preuve* : Si $A = (u, v)$ est liée, c'est trivial ; sinon : $B = (\frac{u}{||u||}, \frac{-1}{\sqrt{u^2v^2 - (u|v)^2}}.(\frac{(u|v)}{||u||}.u - ||u||.v))$ est la base orthonormale obtenue par le procédé de Schmidt. Alors, $gram(A) = det_B(A)^2 = 1/det_A(B)^2 = ||u||^2||v||^2 - (u|v)^2$.

Par ailleurs, en notant $\theta = (\widehat{u,v})$, alors : $gram(u, v) = ||u||^2||v||^2 - (u|v)^2 = ||u||^2||v||^2(1 - \cos^2(\theta)) = ||u||^2||v||^2\sin^2(\theta)$; ce qui, si $dim(E) = 3$, est $||u\wedge v||^2$.

Donc, comme on ne connaît en général pas le signe du sinus : $det_0(u, v) = ||u||.||v||.|\sin(\widehat{u,v})|$.

(On généralise ainsi l'égalité : $(u|v)^2 + det_0(u, v)^2 = ||u||^2||v||^2$).

Le déterminant de Gram donne aussi le volume du parallélotope (généralisation du parallélépipède) ainsi qu'une de ses propriétés (formule de Binet[2]-Cauchy), mais cela déborde un peu trop du sujet de ce chapitre.

7) <u>Formes n-linéaires alternées quelconques</u> (*hors programme*).

Soit $E = \mathbb{K}^m$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors toute famille de plus de m vecteurs, au sens strict, est liée, et toute famille libre possède moins de m vecteurs, au sens large.

L'application $\phi:(E^n \to \mathbb{K})$ est une forme n-linéaire sur E si et seulement si les applications partielles sont linéaires.

Étant donnée la famille $(u_1, u_2, ..., u_n)$, on note ϕ_k la k-ième application partielle, $\phi_k:(E \to \mathbb{K})$:

$$\phi_k(u) = \phi(u_1, u_2, ..., u_{k-1}, u, u_{k+1}, ..., u_n).$$

- *Propriété* : Si l'un des vecteurs de la famille $(u_1, u_2, ..., u_n)$ est nul, alors $\phi(u_1, u_2, ..., u_n) = 0$.

- *Preuve* : Par exemple u_n ; alors : $\phi(u_1, u_2, ..., u_{n-1}, 0_E) = \phi(u_1, u_2, ..., u_{n-1}, 0.0_E) = 0.\phi(u_1, u_2, ..., u_{n-1}, 0_E) = 0$.t

On dit que :

ϕ est alternée si et seulement si : $u_i = u_j \Rightarrow \phi(u_1, u_2, ..., u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, ..., u_{j-1}, u_i, u_{j+1}, ..., u_n) = 0$.

- *Proposition* : Soit ϕ une forme n-linéaire et $\phi_{i,j}$ la forme bilinéaire définie, pour $i < j$ par :

$$\phi_{i,j}(x, y) = \phi(u_1, ..., u_{i-1}, x, u_{i+1}, ..., u_j, y, u_{j+1}, ..., u_n).$$

Alors : ϕ alternée $\Leftrightarrow$ $\phi_{i,j}$ antisymétrique pour tout couple $(i, j) \in [\![1, n]\!]$, $i < j$.

- *Preuve* : Si ϕ est une forme n-linéaire alternée, alors : $0 = \phi(u_1, ..., u_{i-1}, u_i + u_j, u_{i+1}, ..., u_{j-1}, u_i + u_j, u_{j+1}, ..., u_n)$ est égal, en appliquant la linéarité, à une somme de quatre termes dont deux sont nuls car ayant deux fois u_i ou deux fois u_j ; il reste alors le résultat souhaité, à savoir : $\phi(u_1, ..., u_{i-1}, u_j, u_{i+1}, ..., u_{j-1}, u_i, u_{j+1}, ..., u_n) + \phi(u_1, u_2, ..., u_n) = 0$. Réciproquement, si le fait d'échanger deux vecteurs change le signe, pour $u_i = u_j$, on a : $\phi(u_1, u_2, ..., u_n) = \phi(u_1, ..., u_{i-1}, u_j, u_{i+1}, ..., u_{j-1}, u_i, u_{j+1}, ..., u_n) = -\phi(u_1, u_2, ..., u_n)$, d'où $\phi(u_1, u_2, ..., u_n) = 0$, on a bien une forme alterné.

- *Permutations* : On appelle transposition une permutation de deux éléments. Toute permutation σ est produit de transpositions, et on appelle « *signature de σ* » = $\varepsilon(\sigma)$, (-1) à la puissance le nombre de transpositions

[2] Jacques P. M. Binet : 1786-1856.

apparaissant dans la décomposition de σ en transpositions. Le nombre de transpositions n'est pas unique, mais sa parité est unique (on l'admettra) :

$\sigma = t_1t_2...t_k \Rightarrow \varepsilon(\sigma) = (-1)^k$. (Et : $\varepsilon(id) = (-1)^0 = 1$).

- *Généralisation* : Échanger deux vecteurs consiste à appliquer une transposition à la famille ordonnée de n vecteurs : $A = (u_1, ..., u_n)$.Il est ainsi possible de d'appliquer une permutation quelconque σ au vecteurs de la famille A : $f(\sigma(A)) = \varepsilon(\sigma).f(A)$ où $\varepsilon(\sigma) = (-1)^q$, q étant le nombre de transpositions qu'il faut appliquer pour rétablir l'ordre initial, appelé aussi : *signature de* σ.

• Familles liées, familles libres.

- *Proposition* : Si ϕ est alternée et non nulle (quelconque),

① A famille liée $\Rightarrow \phi(A) = 0$. Donc si $m < n$ alors ϕ est l'application nulle.

- *Corollaire* : Si $p = \dim(\mathrm{Vect}(A))$, alors $p < n \Rightarrow \mathrm{Vect}(A) \subset \mathrm{Ker}(\phi)$.

② Si $m \geq n$: A famille libre et $\phi(A) = 0 \Rightarrow \phi$ est nulle sur $\mathrm{Vect}(A)$.

③ Si $m = n$: A famille libre $\Leftrightarrow \phi(A) \neq 0$; A famille liée $\Leftrightarrow \phi(A) = 0$.

(À noter qu'il n'existe pas de famille libre de plus de m vecteurs).

- *Preuve* : Si $(u_1, u_2, ..., u_n)$ est une famille liée, alors il existe une combinaison linéaire nulle ayant au moins un coefficient non nul, ce qui signifie que l'un des vecteurs est combinaison linéaire des autres ; par exemple : $u_n = \alpha_1.u_1 + \alpha_2.u_2 + ... + \alpha_{n-1}.u_{n-1}$. D'où, grâce à la n-linéarité : $\phi(u_1, u_2, ..., u_{n-1}, \alpha_1.u_1 + \alpha_2.u_2 + ... + \alpha_{n-1}.u_{n-1}) = \alpha_1.\phi(u_1, u_2, ..., u_{n-1}, u_1) + \alpha_2.\phi(u_1, u_2, ..., u_{n-1}, u_2) + ... + \alpha_{n-1}.\phi(u_1, u_2, ..., u_{n-1}, u_{n-1}) = 0$. Si A est libre c'est une base de $\mathrm{Vect}(A)$; soit alors $\phi(u_1, u_2, ..., u_{n-1}, u_n) = 0$, et un vecteur quelconque $v_n = \alpha_1.u_1 + \alpha_2.u_2 + ... + \alpha_n.u_n$, on a : $\phi(u_1, u_2, ..., u_{n-1}, v_n) = 0$ en appliquant la linéarité. En appliquant de même la linéarité à toute famille de n vecteurs $(v_1, v_2, ..., v_n)$ de $\mathrm{Vect}(A)$, on arrive à : $\phi(v_1, v_2, ..., v_n) = 0$, d'où ϕ est l'application nulle sur $\mathrm{Vect}(A)$. Par suite, en appliquant les deux premières on trouve la troisième.

- ***Démonstration du théorème*** : Toutes les formes n-linéaires alternées sont proportionnelles.

Cela veut dire que si la forme n-linéaire alternée ϕ n'est pas l'application nulle, alors toute forme n-linéaire alternée ψ est telle que $\psi = k.\phi$, où k est un scalaire.

- *Preuve* : Soit $B = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base de E, et le scalaire k tel que $\psi(e_1, e_2, ..., e_n) = k.\phi(e_1, e_2, ..., e_n)$. Alors, si σ est une permutation des n vecteurs de B, on a : $\psi(\sigma(e_1), \sigma(e_2), ..., \sigma(e_n)) = k.\phi(\sigma(e_1), \sigma(e_2), ..., \sigma(e_n))$; il suffit en effet de les échanger deux par deux jusqu'à avoir la bonne disposition, ce qui est une autre façon de dire que toute permutation est composée de transpositions (échange de deux éléments). Par suite, si $(u_1, u_2, ..., u_n)$ est une famille quelconque d'éléments de E, alors : $\psi(u_1, u_2, ..., u_n) = k.\phi(u_1, u_2, ..., u_n)$. En effet, en appliquant la linéarité, les seuls termes non nuls sont ceux qui sont de la forme $\psi(\sigma(e_1), \sigma(e_2), ..., \sigma(e_n))$, il suffit ensuit d'appliquer ce qui précède.

- ***Démonstration de*** $\boldsymbol{\det({}^tM) = \det(M)}$: En appliquant la linéarité à la famille des vecteurs colonnes de M on arrive à une combinaison linéaire de termes de la forme : $k.\det_B(\sigma(e_1), \sigma(e_2), ..., \sigma(e_n))$ où σ est une permutation sur n éléments, car ce sont les seuls termes qui ne sont pas nuls.
Et il en est de même en appliquant la linéarité à la famille des vecteurs colonne de ${}^tM$, avec cette précision supplémentaire que le facteur k obtenu pour M se retrouve affecté à : $k.\det_B({}^t(\sigma(e_1), \sigma(e_2), ..., \sigma(e_n)))$. Il suffit donc de démontrer que la propriété est vraie pour une matrice de permutation pour qu'elle soit vraie dans le cas général. Or, une matrice de permutation possède deux propriétés qui permettent de conclure : d'une part son déterminant vaut ± 1 selon le nombre de transpositions qu'il faut appliquer pour retrouver la matrice identique ; et d'autre part la transposée d'une matrice de permutation est égale à son inverse car pour obtenir 1 dans la diagonale en faisant le produit ligne par colonne, il est nécessaire que le lignes de l'une soient égales aux colonnes de l'autre (vu qu'il y a un seul « 1 » par ligne et par colonne, et des zéros sinon). Comme une transposition est son propre inverse, quand on a la décomposition d'une matrice de permutation en transpositions, sa transposée est égale au produit des mêmes transpositions dans l'ordre inverse, elles ont donc le même déterminant. La proposition est alors vraie dans le cas général.

- *Exemple* : Soit $P = \begin{pmatrix} 0&0&0&1 \\ 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \end{pmatrix}$; alors $P = t_{34}t_{24}t_{14} = \begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&0&1 \\ 0&0&1&0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&0&0&1 \\ 0&0&1&0 \\ 0&1&0&0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0&0&0&1 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 1&0&0&0 \end{pmatrix}$, et ${}^tP = P^{-1} = t_{14}t_{24}t_{34} = \begin{pmatrix} 0&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \\ 1&0&0&0 \end{pmatrix}$.