G) Fiche : Déterminants.

1) <u>Formes n-linéaires alternées</u>.

ϕ est une forme n-linéaire sur $E = \mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ si et seulement si les applications partielles sont linéaires.

ϕ est alternée si et seulement si : $u_i = u_j \Rightarrow \phi(u_1, u_2, \ldots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \ldots, u_{j-1}, u_i, u_{j+1}, \ldots, u_n) = 0$.

Proposition : alternée $\Leftrightarrow$ antisymétrique (par groupes de deux vecteurs).

- *Échange* : Échanger deux vecteurs s'appelle « appliquer une transposition » à la famille ordonnée de n vecteurs : $A = (u_1, \ldots, u_n)$, ce qui a pour conséquence de changer le signe de son image par la forme multilinéaire alternée.

2) <u>Définition et propriétés</u>.

Théorème : Toutes les formes n-linéaires alternées sont proportionnelles.

Définition : Le déterminant d'une famille A de vecteurs dans une base B est la forme linéaire alternée qui prend la valeur 1 sur B, notée $\det_B(A)$ avec $\det_B(B) = 1$.

Propriété : $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ est une famille liée $\Leftrightarrow \det_B(u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0$.
$(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ est une famille libre $\Leftrightarrow \det_B(u_1, u_2, \ldots, u_n) \neq 0$.

Proposition : Si f est un endomorphisme de E, $\det(f) = \det_B(f(B))$ ne dépend pas de la base B choisie. Alors : $\det_B(f(A)) = \det(f).\det_B(A)$.

Si M est la matrice de f dans la base B alors : $\det(M) = \det(f)$, qui ne dépend pas non plus de la base dans laquelle on exprime f.

Conséquence : Deux matrices semblables ont le même déterminant.

Propriétés : Soit B la base canonique, et A une famille de n vecteurs ;

A base de $E \Leftrightarrow \det_B(A) \neq 0$ $\det_B(B) = 1$ $\det_{B'}(A) = \det_{B'}(B).\det_B(A)$	f automorphisme $\Leftrightarrow \det(f) \neq 0$ $\det(f \circ g) = \det(f).\det(g)$ $\det(id_E) = 1$ Si f bijective : $\det(f^{-1}) = 1/\det(f)$	M inversible $\Leftrightarrow \det(M) \neq 0$ $\det(M.N) = \det(M).\det(N)$ $\det(I) = 1$ Si M inversible : $\det(M^{-1}) = 1/\det(M)$ $\det({}^tM) = \det(M)$

4) Cas initiaux.

$n = 1$: $\det(x) = x$.

$n = 2$: $\det\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$.

$n = 3$: Règle de Sarrus : on recopie les deux premières lignes sous le déterminant, on fait les produits de trois termes en assignant un signe + aux diagonales descendantes et un signe - aux diagonales montantes :

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 - x_3y_2z_1 - x_1y_3z_2 - x_2y_1z_3.$$

- Méthode du produit vectoriel : $\det(u_1, u_2, u_3) = (u_1|u_2 \wedge u_3) = (u_1 \wedge u_2|u_3)$;

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = x_1.\begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - x_2.\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} + x_3.\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} = z_1.\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} - z_2.\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + z_3.\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

5) Cas général.

Développement selon une ligne ou une colonne : On choisit une ligne i ou une colonne j du déterminant Δ, et on fait varier l'autre indice ; par exemple on choisit la colonne j et on fait varier i de 1 à n. À chaque coefficient a_{ij} on affecte un signe appelé sa signature égal à $(-1)^{i+j}$ et le déterminant m_{ij} d'ordre $n - 1$ obtenu en supprimant la i-ème ligne et la j-ième colonne de Δ, appelé le mineur de a_{ij}. Alors :

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} m_{ij}.$$

Méthode du pivot de Gauss : On peut additionner à n'importe quelle ligne ou colonne une combinaison linéaire des autres. *Le but est de faire apparaître des 0 et d'appliquer ensuite la méthode précédente*.

6) Cas particuliers.

Le déterminant d'une matrice diagonale ou d'une matrice triangulaire est égal au produit de ses termes diagonaux.

Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs : Si $p + q = n$, que A et C sont des matrices carrées d'ordre respectifs p et q, B une matrice quelconque et Θ une matrice nulle de dimensions convenables, alors :

$$\begin{vmatrix} A & \Theta \\ B & C \end{vmatrix} = \det(A).\det(C).$$

De même si les dimensions sont convenables : $\begin{vmatrix} A & B \\ \Theta & C \end{vmatrix} = \det(A).\det(C)$.

Matrice diagonale par blocs : $A_1, A_2, \ldots, A_p$ étant des matrices carrées et Θ des matrices nulles (pas forcément de mêmes dimensions),

$$\begin{vmatrix} A_1 & \Theta & \Theta & \ldots & \Theta \\ \Theta & A_2 & \Theta & \ldots & \Theta \\ \Theta & \Theta & A_3 & \ldots & \Theta \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \Theta & \Theta & \Theta & \ldots & A_p \end{vmatrix} = \det(A_1).\det(A_2)\ldots\det(A_p).$$