# H) Réduction des endomorphismes.

$E$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, de dimension $n$ muni de la base canonique $B = (e_1, e_2, ..., e_n)$.
Si $f$ est donné initialement, c'est un endomorphisme de $E$ de matrice $M$ dans $B$.
Si $M$ est donnée initialement, $f$ est l'endomorphisme de $E = \mathbb{K}^n$ dont la matrice est $M$ dans la base canonique.

1) <u>Définitions</u>. Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres (éléments propres, spectre). (*Cf. chapitre C §11*).

Le scalaire $\lambda$ est une valeur propre de $f$ si et seulement s'il existe un vecteur non nul $u$ tel que : $\mathbf{f(u) = \lambda.u}$.

Le vecteur non nul $u$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda$ de $f$ si et seulement si : $f(u) = \lambda.u$.

L'ensemble des valeurs propres de $f$ est appelé le spectre de $f$ (qu'on peut noter Spec(f)).

- *Proposition* : Si $u$ est un vecteur propre de $f$ il en va de même de tout vecteur colinéaire à $u$, sauf $0_E$. Deux vecteurs propres de $f$ associés à des valeurs propres distinctes ne sont pas colinéaires ; plus généralement, une famille de vecteurs propres tous associés à des valeurs propres distinctes est libre. (Cf. ch. C §11).

- *Preuve* : Par récurrence sur $p$, la propriété est évidente pour $p = 1$ ; on suppose que la famille $(u_1, u_2, ..., u_p)$ de vecteurs propres associée aux valeurs propres respectives : $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$, est libre. S'il existe un autre vecteur propre $u_{p+1}$ associé à la valeur propre $\lambda_{p+1}$, la famille $(u_1, u_2, ..., u_{p+1})$ ne peut être liée que si $u_{p+1}$ est combinaison linéaire des précédents : $u_{p+1} = \alpha 1.u1 + \alpha_2.u_2 + ... + \alpha_p.u_p$. On fait ensuite l'image par $f$ de cette égalité et on la multiplie par $\lambda_{p+1}$ : $\lambda_{p+1}.u_{p+1} = \lambda_1\alpha 1.u1 + \lambda_2\alpha_2.u_2 + ... + \lambda_p\alpha_p.u_p = \lambda_{p+1}\alpha 1.u1 + ... + \lambda_{p+1}\alpha_p.u_p$ ; il ne reste plus qu'à soustraire les deux formes obtenues : $(\lambda_1 - \lambda_{p+1})\alpha 1.u1 + (\lambda_2 - \lambda_{p+1})\alpha_2.u_2 + ... + (\lambda_p - \lambda_{p+1})\alpha_p.u_p = 0_E$. D'où, comme c'est une combinaison linéaire nulle d'une famille libre : $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_{p+1}$, ce qui est impossible par hypothése, d'où la validité de la proposition.

- *Autre preuve* : Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, soit $u_j$ le vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_j$, et soit $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ une famille de scalaires tels que $\alpha_1.u_1 + \alpha_2.u_2 + ... + \alpha_k.u_k = 0_E$. On applique $f$ autant de fois qu'on le souhaite et on obtient ainsi : $\forall m \in \mathbb{N}$,

$$\alpha_1\lambda_1^m.u_1 + \alpha_2\lambda_2^m.u_2 + ... + \alpha_k\lambda_k^m.u_k = 0_E.$$

Ainsi, en notant $(x_{1,j}, x_{2,j}, ..., x_{n,j})$ les composantes de $u_j$ dans la base canonique, on a : $\forall i \in [\![1, n]\!]$,

$$\lambda_1^m(\alpha_1 x_{i,1}) + \lambda_2^m(\alpha_2 x_{i,2}) + ... + \lambda_k^m(\alpha_k x_{i,k}) = 0,$$ où les inconnues sont $\alpha_1 x_{i,1}, \alpha_2 x_{i,2}, ..., \alpha_k x_{i,k}$.

En faisant varier $m$ de $0$ à $k-1$, on obtient un système d'équations dont le déterminant est un déterminant de Vandermonde non nul. Il en résulte que toutes les inconnues sont nulles.

En faisant varier $i$ de $1$ à $n$, et en écrivant les résultats sous forme de colonnes, on obtient que : $\alpha_1.u_1 = \alpha_2.u_2 = ... = \alpha_k.u_k = 0_E$. Mais come les vecteurs ne sont pas nul, on a nécessairement : $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_k = 0$, d'où l'on déduit que la famille considérée est libre.

- *Généralisation* : Cette définition reste valable dans le cas où $E$ est de dimension infinie (comme pratiquement tout ce qui ne concerne pas les matrices).

- *Équations* : Avec l'écriture matricielle $f(u) = \lambda.u$ devient : $M.u_B = \lambda.u_B$, ou encore : $(M - \lambda.I).u_B = \Theta$ (matrice nulle). Si la matrice $M - \lambda.I$ est inversible, il n'y a alors qu'une unique solution, à savoir le vecteur nul. Le problème n'admet donc une solution non triviale (non nulle) que dans le cas où cette matrice n'est pas inversible.

- *Proposition* : L'ensemble des vecteurs propres associés à une valeur propre donnée, auquel on adjoint $0_E$, est un sous-espace vectoriel appelé : Sous-espace propre associé à la valeur propre en question. (L'espace vectoriel est $E = \mathbb{K}^n$ dans le cas d'une matrice carrée d'ordre $n$). (Preuve immédiate).

- *Notation* : Le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda$ est noté en général $E_\lambda$, et on a ainsi l'égalité : $E_\lambda = \mathrm{Ker}(f - \lambda.id_E)$.

2) Endomorphismes et matrices diagonalisables. Polynôme caractéristique.

• Une matrice $M$ est diagonalisable quand elle est semblable à une matrice diagonale : Il existe une matrice inversible $P$ et une matrice diagonale $D$ telles que : $\mathbf{M = PDP^{-1}}$.

• Un endomorphisme est diagonalisable quand il existe une base de vecteurs propres. En pratique on cherche cette base en diagonalisant sa matrice dans la base canonique ; $P$ est alors la matrice de passage dont les colonnes sont les coordonnées de la nouvelle base données dans l'ancienne base.

- *Polynôme caractéristique* : Le polynôme caractéristique de $f$ est : $\det(f - \lambda.id_E)$. C'est un polynôme de degré $n$ (la dimension de $E$).

Le polynôme caractéristique de $M$ est : $\mathbf{\det(M - \lambda.I_n)}$. C'est un polynôme de degré $n$.[i]

(*On trouve quelquefois des définitions donnant* $\det(\lambda.id_E - f)$ *et* $\det(\lambda.I_n - M)$ *; les deux formules diffèrent du facteur* $(-1)^n$).

• Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique. Il s'en suit que si $M$ est la matrice de $f$ dans une base quelconque alors : $\det(f - \lambda.id_E) = \det(M - \lambda.I_n)$.

- *Preuve* : Le polynôme caractéristique ne dépend pas de la base dans laquelle est donnée la matrice de $f$ car on peut écrire les égalités : $\det(P^{-1}MP - \lambda.I) = \det(P^{-1}(M - \lambda.I)P) = \det(P^{-1}).\det(M - \lambda.I).\det(P) = \det(M - \lambda.I)$.

- *Remarque* : Le terme constant de $C_f(\lambda) = \det(M - \lambda I)$ est $\det(M)$, et son terme de plus haut degré est $(-1)^n\lambda^n$. Le coefficient de son terme de degré $n - 1$ est $(-1)^{n-1}.\mathrm{tr}(M)$, ce dont on peut remarquer au passage que $\mathrm{tr}(M)$ est égale à la somme de toutes les valeurs propres quand $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

- *Polynôme scindé* : Un polynôme de degré $n$ est scindé si tous ses facteurs irréductibles sont du premier degré ; autrement dit, s'il est uniquement produit de $n$ polynômes du premier degré (pas forcément distincts), ou s'il possède $n$ racines dans $\mathbb{K}$ (pas forcément distinctes). Par exemple $(x - 1)^2(2x - 7)^5$ est scindé, tandis que $x^4 - 1$ ne l'est pas dans $\mathbb{R}$.

Si le polynôme caractéristique de $M$ est scindé, la somme des valeurs propres, en tenant compte de leur multiplicité, est égale à la trace de $M$.

S'il n'est pas scindé, on peut toujours revenir à $\mathbb{C}$ ; par exemple : $(2 - \lambda)^3(1 + \lambda + \lambda^2)$ correspond à une trace de :

$$2\times3 + e^{2i\pi/3} + e^{-2i\pi/3} = 6 + 2.\cos(2\pi/3) = 5.$$

- *Remarques* : Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ alors tous les polynômes non constants sont scindés. Il est nécessaire que le polynôme caractéristique soit scindé pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable, mais la réciproque est fausse (exemple : Pour $n = 2$, $f(x.e_1 + y.e_2) = (x + y).e_1 + y.e_2$).

- *Proposition* : La dimension du sous-espace propre associé à une valeur propre est inférieur (ou égal) à la multiplicité de cette valeur propre en tant que racine du polynôme caractéristique. Si $\lambda$ est une racine d'ordre de multiplicité $k$ de $C_f$, on dit que c'est une valeur propre d'ordre $k$ de $f$. (Preuve avec un supplémentaire).

- *Corollaire* : Un endomorphisme (ou une matrice) est diagonalisable si et seulement son polynôme caractéristique est scindé et si l'ordre de toute valeur propre est égal à la dimension du sous-espace propre associé.

- *Exercice* : Étant donnée deux matrices carrées $A$ et $B$ d'ordre $n$, $AB$ et $BA$ ont le même polynôme caractéristique.

- *Solution* : Si $A$ inversible, alors : $\det(\lambda.I - AB) = \det(A^{-1}).\det(\lambda.I - AB).\det(A) = \det(A^{-1}(\lambda.I - AB)A) = \det(\lambda.I - BA)$.

Si $A$ n'est pas inversible, alors soit $\alpha = \inf\{|\lambda|,\ \lambda$ valeur propre non nulle de $A\}$. Alors, $\forall\ \varepsilon \in \mathbb{R}^*$, $-\alpha < \varepsilon < \alpha$, $A' = A + \varepsilon.I$ est inversible car $\det(A') \neq 0$, sinon $\varepsilon$ serait une valeur propre de $A$, ce qui est exclu par sa construction.

On peut donc lui appliquer la première démonstration : $\det(\lambda.I - A'B) = \det(\lambda.I - BA') \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^*, -\alpha < \varepsilon < \alpha, P(\varepsilon) = \det(\lambda.I - AB - \varepsilon.B) - \det(\lambda.I - BA - \varepsilon.B) = 0$.

Mais, comme $P$ est un polynôme de $\varepsilon$, on peut utiliser l'argument de continuité, ou le fait qu'il admet une infinité de racines, c'est donc le polynôme nul ; et ainsi : $P(0) = 0$. Il en résulte que : $\det(\lambda.I - AB) = \det(\lambda.I - BA)$.

- *Remarque* : Si $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$, et que $Q$ un polynôme, alors : $Q(D) = \begin{pmatrix} Q(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Q(\lambda_2) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & Q(\lambda_n) \end{pmatrix}$.

En outre : $Q(PDP^{-1}) = a_0.PIP^{-1} + a_1.PDP^{-1} + a_2.PD^2P^{-1} + \dots + a_k.PD^kP^{-1} = P.Q(D).P^{-1}$.

Il en résulte que, si $M$ est diagonalisable et $Q$ son polynôme caractéristique, alors $Q(M) = \Theta$.[ii]

3) <u>Cas particulier des homothéties, projecteurs, symétries, etc</u>. (*Cf chapitre C §13*).

• Une homothétie est déjà diagonale.

• Étant donnés un projecteur $p$ et une symétrie $s$ tels que $s = 2p - id_E$, alors $Im(p)$ est le sous-espace propre associé à la valeur propre $1$ à la fois pour $p$ et $s$, tandis que $Ker(p)$ est le sous-espace propre associé à la valeur propre $0$ pour $p$, et $-1$ pour $s$ (On diagonalise donc dans une base dont une partie est dans $Ker(p)$ et l'autre dans $Im(p)$, qui sont supplémentaires).

- *Preuve* : Soit $F$ et $G$ deux sous-espaces supplémentaires, $p$ la projection sur $F$ parallèlement à $G$ et $s$ la symétrie par rapport à $F$ parallèlement à $G$. Soit $B' = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ une base de $E$ telle que $(u_1, u_2, \dots, u_m)$ soit une base de $F$ et $(u_{m+1}, u_{m+2}, \dots, u_n)$ une base de $G$. On a donc :

Pour $1 \leq k \leq m$ : $p(u_k) = u_k$ et $s(u_k) = u_k$.

Pour $m + 1 \leq k \leq n$ : $p(u_k) = 0_E$ et $s(u_k) = -u_k$.

- ***Rappels*** : $p$ est un projecteur si et seulement si $p \circ p = p$ ; $s$ est une symétrie si et seulement si $s \circ s = id_E$. (Par conséquent : $id_E$ est une symétrie par rapport à $E$ parallèlement à $\{0_E\}$, et $-id_E$ est une symétrie par rapport à $\{0_E\}$ parallèlement à $E$).

*On a $rg(p) = tr(p)$*, en conséquence de quoi, si $M$ est une matrice carrée vérifiant : $M^2 = M$, alors : $rg(M) = tr(M)$.

- *Propositions* : (1) Un endomorphisme admettant $n$ valeurs propres distinctes est diagonalisable.

(2) Une matrice symétrique réelle est diagonalisable. Si $E$ est euclidien elle est diagonalisable dans une base orthonormale de vecteurs propres. (*Remarque* : Ce n'est pas forcément le cas d'une matrice complexe ; par exemple $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable).

- *Exemple* : Soit $M = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}$ (matrice d'inertie) ; alors :

$$\det(M - \lambda.I) = ((D^2 + E^2 + F^2).\lambda - (AD^2 + BE^2 + CF^2 + 2DEF)) - (\lambda - A)(\lambda - B)(\lambda - C).$$

En notant $\Delta$ la droite d'équation $\Delta:(y = (D^2 + E^2 + F^2).x - (AD^2 + BE^2 + CF^2 + 2DEF))$, et $\mathscr{C}$ la courbe d'équation $\mathscr{C}:(y = (x - A)(x - B)(x - C))$, alors les valeurs propres $\lambda$ sont les abscisses des points de $\Delta \cap \mathscr{C}$.

4) <u>Application au calcul des puissances d'une matrice</u>.

Si $M$ est diagonalisable, il est aisé de calculer les puissances de $M$ : $\mathbf{M^k = PD^kP^{-1}}$. À noter que $k$ ne peut pas être négatif si l'une des valeurs propres est nulle ; mais si aucune valeur propre n'est nulle (on peut alors mettre les $\lambda_i$ à toute puissance négative) :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/\lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1/\lambda_n \end{pmatrix}.$$

- *Exemple* : Soit $M = \begin{pmatrix} 31 & -20 & 7 \\ 76 & -47 & 16 \\ 112 & -56 & 16 \end{pmatrix}$; $\det(M - \lambda.I) = -\lambda^3 + 81\lambda = -\lambda(\lambda - 9)(\lambda + 9)$.

$$\lambda_1 = 0 : \ M.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} L_3 - L_2 : \ 9(4x - y) = 0 \\ L_1/(y = 4x) : \ -7(7x - z) = 0 \end{cases} \to \ u_1 : \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

$$\lambda_2 = 9 : \ (M - 9I).\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 22 & -20 & 7 \\ 76 & -56 & 16 \\ 112 & -56 & 7 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} L_3 - L_1 : \ 18(5x - 2y) = 0 \\ L_3 - L_2 : \ 9(4x - z) = 0 \end{cases} \to \ u_2 : \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

$$\lambda_3 = -9 : \ (M + 9I).\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 40 & -20 & 7 \\ 76 & -38 & 16 \\ 112 & -56 & 25 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} L_1 + L_2 - L_3 : \ 2(2x - y) = 0 \\ L_1/(y = 2x) : \ 7z = 0 = 0 \end{cases} \to \ u_3 : \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}, \text{ avec } M = PDP^{-1}, \text{ et : } P^{-1} = \tfrac{1}{9}.\begin{pmatrix} -16 & 8 & -1 \\ -3 & 6 & -3 \\ 14 & -7 & 2 \end{pmatrix}.$$

5) <u>Matrices triangulaires</u>.

Une matrice triangulaire est dite stricte si sa diagonale est nulle.

*Proposition* : Une matrice triangulaire inférieure (respectivement stricte) est semblable à une matrice triangulaire supérieure (respectivement stricte). (Et réciproquement).

Étant donnée la matrice $J_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on a $J_n = J_n^{-1}$ et si $T$ est une matrice triangulaire inférieure alors $J_nTJ_n$ est une matrice triangulaire supérieure, ce changement de base consistant à écrire les mêmes vecteurs en sens inverse[iii]. On peut donc n'étudier ici que les matrices triangulaires supérieures.

• Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont les coefficients de sa diagonale. Réciproquement, lorsqu'on recherchera une matrice triangulaire $T$ semblable à une matrice $M$ donnée, il sera nécessaire que les coefficients diagonaux de $T$ soient les valeurs propres de $M$.

- *Proposition*[iv] : Une matrice triangulaire stricte (diagonale nulle) est nilpotente (ses puissances sont nulles à partir d'un certain rang (= *ordre de nilpotence*)).

- *Réciproquement*[v] : Toute matrice nilpotente est semblable à une matrice triangulaire stricte.

- *Exemple* : Calculer les puissances successives de $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- ***Exercice** : Cas particulier des dimensions 2 et 3.*

Soit $\lambda_1$, $\lambda_2$ et $\lambda_3$ distincts deux à deux. Montrer que :

$\begin{pmatrix} \lambda_1 & x \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

$\begin{pmatrix} \lambda_1 & x \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \lambda_1 & x & b \\ 0 & \lambda_1 & c \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} \lambda_1 & a & b \\ 0 & \lambda_2 & x \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ sont diagonalisables si et seulement si : $x = 0$.

$\begin{pmatrix} \lambda_1 & a & b \\ 0 & \lambda_2 & c \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable si et seulement si le déterminant suivant est nul : $\begin{vmatrix} a & b \\ \lambda_2 - \lambda_1 & c \end{vmatrix} = 0$.

$\begin{pmatrix} \lambda_1 & a & b \\ 0 & \lambda_1 & c \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable si et seulement si $a = b = c = 0$.

$\begin{pmatrix} \lambda_1 & a & b \\ 0 & \lambda_2 & c \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

6) <u>Trigonalisation</u>.

- *Théorème* : Si le polynôme caractéristique est scindé, l'endomorphisme (ou la matrice) est trigonalisable (semblable à une matrice triangulaire supérieure (ou inférieure))

• Mais s'il n'est pas scindé, elle n'est pas trigonalisable (car sinon son polynôme caractéristique serait égal à celui de la matrice triangulaire, mais le polynôme d'une matrice triangulaire étant nécessairement scindé, il y aurait une contradiction).

- *IMPORTANT* : La diagonale de la matrice triangulaire est formée des valeurs propres, chacune selon son ordre de multiplicité dans le polynôme caractéristique. Pour cette raison : Il est préférable de donner les vecteurs propres en commençant par ceux dont la multiplicité est égale à la dimension du sous-espace propre, en particulier ceux qui sont de multiplicité 1.

Une matrice est trigonalisable si l'endomorphisme qui l'admet pour matrice dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$ est lui-même trigonalisable ; autrement dit : $\det(M - \lambda.I_n)$ est scindé dans $\mathbb{K}$.

- *Exemple*. Pour $n = 3$, trigonaliser l'endomorphisme $f$ tel que :

$$f(e_1) = e_2 + 2e_3,\ \ f(e_2) = -e_1 + 3e_2 + e_3,\ \ f(e_3) = -5e_1 + 2e_2 + 6e_3.$$

*Solution* : La matrice de $f$ dans la base canonique est $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -5 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ ; le polynôme caractéristique est :

$\det(M - \lambda.I) = (3 - \lambda)^3$. Il y a donc une unique valeur propre : $\lambda_1 = 3$.

Il n'y a aucune chance que $M$ soit diagonalisable car sinon elle serait semblable à $3I$, d'où : $M = 3PIP^{-1} = 3I$ dès le départ.

Le polynôme caractéristique étant scindé, $M$ est semblable à une matrice triangulaire $T = \begin{pmatrix} 3 & a & b \\ 0 & 3 & c \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, où $T$ est la matrice de $f$ dans la base $B' = (u_1, u_2, u_3)$. On a donc :

$$f(u_1) = 3.u_1,\ \ f(u_2) = 3.u_2 + a.u_1,\ \ f(u_3) = 3.u_3 + b.u_1 + c.u_2.$$

$a$ doit être non nul pour que $u_2$ ne soit pas colinéaire à $u_1$ (car : $f(u) = 3.u \Rightarrow u \in \text{Vect}(u_1)$).

$c$ doit être non nul pour que $(u_1, u_2, u_3)$ soit une base (car si $f(u_3) = 3.u_3 + b.u_1$, il existe une combinaison linéaire nulle).

On peut par contre choisir dès le départ $b = 0$.

$(M - 3I).\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & -1 & -5 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $(L_1 + L_2 + L_3 = 0)$ $\Leftrightarrow \begin{cases} L_2 : \ x = -2z \\ L_3 - 2L_2 : \ y = z \end{cases} \rightarrow u_1 : \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$(M - 3I).\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a.u_1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & -1 & -5 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a.\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} L_2 : \ x = -2z - a \\ L_3 - 2L_2 : \ y = z + a \end{cases}$ (en choisissant $z = 0$ et $a = -1$) $\rightarrow u_2 : \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$(M - 3I).\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c.u_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & -1 & -5 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c.\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} L_2 : \ x = -2z - b - c \\ L_3 - 2L_2 : \ y = z + b + 2c \end{cases}$ (pour $z = 0$ et $c = -1$) $\rightarrow u_3 : \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Par suite : $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et : $T = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

- *Conséquence* : Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ tous les endomorphismes sont trigonalisables (car tous les polynômes de degré $n$ y admettent $n$ racines).

7) Trigonalisation d'un endomorphisme (ou d'une matrice) admettant $\dim(E) - 1$ valeurs propres distinctes.

• $M$ est trigonalisable s'il existe une matrice triangulaire $T$ et une matrice inversible $P$ pour lesquelles $\mathbf{M = PTP^{-1}}$.

Soit $F$ la somme (directe) des sous-espaces propres, c'est soit $E$ (auquel cas elle est diagonalisable), soit un hyperplan, auquel cas, en complétant une base quelconque de $F$ (par exemple avec un élément de la base canonique (placé à la fin)), on obtient une base dans laquelle la matrice de $f$ est triangulaire supérieure. **La dernière valeur diagonale est alors égale à la valeur propre double**. En outre, en choisissant de mettre le vecteur propre de la valeur propre double en avant-dernier, il est possible d'avoir les $n - 2$ premiers coefficients de la dernière colonne nuls.

- *Preuve* : Il suffit de compléter la famille nécessairement libre des $n-1$ vecteurs propres associés à ces valeurs propres avec un vecteur de la base canonique pour en faire une base dans laquelle la matrice de $f$ n'admettra qu'une seule colonne « non diagonale », à savoir la dernière.

Si on veut en plus que la dernière valeur diagonale soit la valeur propre double, autant ordonner tout de suite les vecteurs propres de façon que le dernier soit celui qui lui est associé : $\det(M - \lambda.I) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)...(\lambda_{n-2} - \lambda)(\lambda_{n-1} - \lambda)^2$, et on suppose connus $u_1, u_2, ..., u_{n-1}$.

On cherche ainsi $u_n$ tel que $f(u_n) = \lambda_{n-1}.u_n + a.u_{n-1}$. On commence avec la base définie ci-dessus, où l'on a complété avec un vecteur de la base canonique, par exemple $e_n$ : $B_0 = (u_1, u_2, ..., u_{n-1}, e_n)$. Alors, il existe des coefficients $\alpha_i$, avec $\alpha_n \neq 0$, tels que :

$$f(e_n) = \alpha_1.u_1 + \alpha_2.u_2 + ... + \alpha_{n-1}.u_{n-1} + \alpha_n.e_n.$$

En outre, $\alpha_n = \lambda_{n-1}$ car la nouvelle matrice est triangulaire et semblable à la matrice initiale ; il suffit ensuite de raisonner sur le polynôme caractéristique.

Soit $u_n = x_1.u_1 + x_2.u_2 + ... + x_{n-1}.u_{n-1} + x_n.e_n$, puisque $B_0$ est une base ; on a donc :

$f(u_n) = \lambda_{n-1}.(x_1.u_1 + x_2.u_2 + ... + x_{n-1}.u_{n-1} + x_n.e_n) + a.u_{n-1} = x_1\lambda_1.u_1 + x_2\lambda_2.u_2 + ... + x_{n-1}\lambda_{n-1}.u_{n-1} + x_n.(\alpha_1.u_1 + \alpha_2.u_2 + ... + \alpha_{n-1}.u_{n-1} + \alpha_n.e_n) \Leftrightarrow$

$(x_1\lambda_1 + x_n\alpha_1 - \lambda_{n-1}x_1).u_1 + ... + (x_{n-2}\lambda_{n-2} + x_n\alpha_{n-2} - \lambda_{n-1}x_{n-2}).u_{n-2} + (x_{n-1}\lambda_{n-1} + x_n\alpha_{n-1} - \lambda_{n-1}x_{n-1} - a).u_{n-1} + (x_n\alpha_n - \lambda_{n-1}x_n).e_n = 0_E \Leftrightarrow$

pour tout $i \in [\![1, n-2]\!]$, $x_i = x_n\alpha_i/(\lambda_{n-1} - \lambda_1)$, $a = x_n\alpha_{n-1}$, $\alpha_n = \lambda_{n-1}$.

La proposition est donc vraie.

- *Exemple* : Pour $n = 3$, trigonaliser l'endomorphisme $f$ tel que $f(e_1) = e_1 - e_3$, $f(e_2) = 2e_1 + e_2 + 2e_3$, $f(e_3) = -e_3$.

- *Remarque* : Si le polynôme caractéristique est de la forme $(a - \lambda)^n$, alors soit l'endomorphisme est une homothétie, la matrice est $a.I$ diagonale dès le départ, soit l'endomorphisme et la matrice ne sont pas diagonalisables mais ils sont trigonalisables.

8) Application au calcul des puissances de matrices trigonalisables.

Si $M$ est trigonalisable, alors : $\mathbf{M^k = PT^kP^{-1}}$.

- *Cas particulier*[vi] : Si $T$ est une matrice triangulaire stricte, il est aisé de calculer les puissances de $(T + \lambda.I)$ car on peut appliquer la formule du binôme de Newton :

$$\mathbf{(T + \lambda.I)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}.\lambda^{k-i}.T^i}.$$

- *Remarques* : Toutes les puissances de $T$ sont nulles au-dessus de son ordre de nilpotence, et le polynôme caratéristique de $(T + \lambda.I)$ est $(-\lambda)^n$.[vii]

On trouve un résultat similaire pour une matrice diagonale quelconque, si elle commute avec la matrice triangulaire stricte.

- *Exemple* : Calculer $T^7$ pour $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

*On écrit* $T = I + T'$ *où* $T' = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. *Il est simple de vérifier que* $T'^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $T'^3 = \Theta$ (*la matrice nulle*). *Il ne reste plus qu'à appliquer la formule du binôme de Newton :* $T^7 = I + 7.T' + 21.T'^2$.

On pourrait généraliser cette formule : $(\lambda.I + T')^n = \lambda^n.I + n\lambda^{n-1}.T' + \frac{n(n-1)}{2}.T'^2$.

- *Cas de la dimension deux* : $\begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & na\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$.

9) <u>Application aux suites</u>.

Si $(u_n)$ et $(v_n)$ sont définies par : $\{u_{n+1} = au_n + bv_n,\ v_{n+1} = cu_n + dv_n\}$ alors :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = M.\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} \text{ avec } M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \text{ Et ainsi : } \begin{pmatrix} \mathbf{u_n} \\ \mathbf{v_n} \end{pmatrix} = \mathbf{PD^nP^{-1}}.\begin{pmatrix} \mathbf{u_0} \\ \mathbf{v_0} \end{pmatrix}.$$

- *Application*[viii] : Si $(u_n)$ est définie par une récurrence linéaire d'ordre $2$ pour tout entier (naturel) $n$ : $(u_0, u_1)$ donnés, et : $u_{n+2} = a.u_{n+1} + b.u_n$.

On peut procéder de la même façon en posant : $\begin{pmatrix} \mathbf{u_{n+2}} \\ \mathbf{u_{n+1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} \mathbf{u_{n+1}} \\ \mathbf{u_n} \end{pmatrix}$.

- ***Autre méthode*** : On recherche les solutions particulières non nulles de la forme $u_n = r^n$ ; on aboutit au même polynôme de la variable $r$ que le polynôme caractéristique de la matrice précédente.

• *Ordre deux* : Si le trinôme du second degré obtenu admet deux racines réelles distinctes $r_1$ et $r_2$, alors la solution générale de la récurrence est : $u_n = \alpha.r_1^n + \beta.r_2^n$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

Si le trinôme admet une racine double $r_1$, alors : $u_n = (\alpha n + \beta).r_1^n$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

Si le trinôme du second degré obtenu admet deux racines complexes conjuguées $r_1$ et $r_2$, alors la solution générale de la récurrence est : $u_n = \alpha.r_1^n + \beta.r_2^n$ où $\alpha$ et $\beta$ sont des complexes conjugués.

- *Remarques* : Dans le cas d'une récurrence du type $u_{n+2} = a.u_{n+1} + b.u_n + c$, $u_n$ est somme de la solution de $v_{n+2} = a.v_{n+1} + b.v_n$ et d'une solution particulière de l'équation initiale, par exemple une suite constante $k$ (ou $kn$ ou $kn^2$ dans certains cas).

Il est en outre possible de généraliser ces résultats à des dimensions supérieures à 2.

Matrice trigonalisable : $\begin{pmatrix} \mathbf{u_n} \\ \mathbf{v_n} \end{pmatrix} = \mathbf{PT^nP^{-1}}.\begin{pmatrix} \mathbf{u_0} \\ \mathbf{v_0} \end{pmatrix}$.

• On peut généraliser ces résultats à des dimensions supérieures.

- *Exemples* : (1) Étudier $(u_n)$ et $(v_n)$, définies par : $\{u_0 = 1,\ v_0 = 2,\ u_{n+1} = 5u_n + 4v_n,\ v_{n+1} = u_n + 2v_n\}$.

(2) Étudier la suite $(u_n)$, définie par : $\{u_0 = 1,\ u_1 = 2,\ u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n - 4\}$. (Il y a une solution particulière constante).

10) <u>Application aux systèmes différentiels</u>.

Si $x$ et $y$ sont des fonctions dérivables de la variable $t$ définies par les deux équations différentielles : $\{x' = ax + by,\ y' = cx + dy\}$ alors :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ avec } M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Si $M = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}P^{-1}$ alors pour $u$ et $v$ telles que $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = P^{-1}.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, on a $\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 u \\ \lambda_2 v \end{pmatrix}$.

Il s'en suit que : $\boldsymbol{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P.\begin{pmatrix} k_1.e^{\lambda_1 t} \\ k_2.e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}}$ où $k_1$ et $k_2$ sont des constantes.

- *Remarque* : Il faut modifier la forme des solutions obtenues quand $\lambda_1$ et $\lambda_2$ sont des complexes (conjugués) et qu'on souhaite obtenir des fonctions réelles (qui seront dans ce cas des sinus ou cosinus obtenus avec les formules d'Euler).

- *Exemple* : Le système $\{x' = -y,\ y' = x\}$ admet les valeurs propres $i$ et $-i$, et on obtient alors : $\{u = k_1e^{it},\ v = k_2e^{-it}\}$ pour $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$ ; d'où :

$$\{x = k_1e^{it} + k_2e^{-it},\ y = -ik_1e^{it} + ik_2e^{-it}\}.$$

En posant $k_1 = (\alpha + i\beta)/2$ et $k_2 = (\alpha - i\beta)/2$, on obtient :

$$\{x = \alpha.\cos(t) - \beta.\sin(t),\ y = \beta.\cos(t) + \alpha.\sin(t),\ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}.$$

- *Autre méthode* : $\{x'' = -y' = -x,\ y'' = x' = -y\}$.

- *Autre exemple* : Résoudre $\{x' = x + y,\ y' = x - y\}$ (où $x$ et $y$ sont des fonctions de la variable $t$).

• Matrice non diagonalisable (dans $\mathbb{C}$) : Nécessairement il y a une racine double $\lambda$ qui permet de trouver $v$, et il faut ensuite résoudre l'équation portant sur $u$ en deux fois (sans second membre puis avec) ; la solution générale est : $v = k_1.e^{\lambda t}$, $u = (ak_1t + k_2).e^{\lambda t}$ où $k_1$ et $k_2$ sont des scalaires, $a$ est le coefficient non nul et non diagonal de la matrice triangulaire.

- On peut généraliser ces résultats à des dimensions supérieures.

• *Équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants* : $x'' = ax' + bx \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x'' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x' \\ x \end{pmatrix}$.

- *Exemple* : $x'' = 2x' - x \rightarrow \begin{pmatrix} x'' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x' \\ x \end{pmatrix}$. La matrice est trigonalisable : $M = PTP^{-1}$ avec, après calculs : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, En changeant de base : $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = P^{-1}.\begin{pmatrix} x' \\ x \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = P^{-1}.\begin{pmatrix} x'' \\ x' \end{pmatrix}$, alors : $\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = T.\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$.

On résout ensuite comme dans le cas général : $\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = T.\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \Rightarrow v = ae^t$ et $u = (at + b)e^t$.

Finalement : $\begin{pmatrix} x' \\ x \end{pmatrix} = P.\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (at + b)e^t \\ ae^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (at + a + b)e^t \\ (at + b)e^t \end{pmatrix}$. D'où : $x = (at + b)e^t$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

(Ce n'est peut-être pas la meilleure méthode, mais ceci prouve au moins qu'elle est valide).

• *Équation avec second membre* : $X' = AX + B$. Avec le même processus on trouve une matrice de passage $P$ et une matrice $T$ triangulaire ou diagonale telle que : $A = PTP^{-1}$.

Soit $U$ tel que : $X = PU$, où de même : $X' = PU'$, et ainsi : $PU' = PTP^{-1}PU + B = PTU + B$. On doit finalement résoudre : $U' = TU + P^{-1}B$. On pose alors les différentes équations et on les résout avec la méthode habituelle ; par exemple : équation homogène + variation des constantes.

11) <u>Cas particulier des espaces euclidiens</u>.

Si $E$ est euclidien et que $f$ conserve le produit scalaire, deux vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux (il n'y a que deux valeurs propres possibles : $-1$ et $1$).

- *Preuve* : Car $(u|v) = (f(u)|f(v)) = (\lambda.u|\mu.v) = \lambda\mu.(u|v) \Rightarrow (u|v) = 0$.

Il s'en suit que, si $f$ est diagonalisable, il existe une base orthonormale de vecteurs propres.

Si $M$ est une matrice symétrique, alors il existe une base orthonormale de vecteurs propres. De même pour $f$ si elle est l'endomorphisme de matrice $M$ dans la base canonique orthonormale. En outre, $f$ vérifie la propriété suivante : $\forall (u, v) \in E^2$, $(f(u)|v) = (u|f(v))$ (endomorphisme symétrique).

- *Preuve* : On montre d'abord la propriété de $f$ pour la base canonique orthonormale, la linéarité permettra de l'étendre à tous les vecteurs ; soit, en notant $M = (a_{ij})$ : $(e_i|f(e_j)) = (e_i|\sum_k a_{kj}.e_k) = a_{ij} = a_{ji} = (e_j|f(e_i)) = (f(e_i)|e_j)$.

On montre ensuite que les sous-espaces propres sont orthogonaux : Soit $u$ un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda$, et $v$ un vecteur propre associé à la valeur propre $\mu$, $\lambda \neq \mu$ ; alors : $\lambda.(u|v) = (f(u)|v) = (u|f(v)) = \mu.(u|v)$, d'où l'on déduit : $(u|v) = 0$.

12) <u>Exercices</u>. ($k$ étant un entier naturel quelconque).

*a*) ***Proposition*** : Une matrice de rang $1$ est diagonalisable si et seulement si sa trace n'est pas nulle.

*b*) ***Proposition*** : Toute matrice trigonalisable est semblable à une matrice triangulaire, diagonale par blocs triangulaires.

*c*) Calculer $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}^k$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^4$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^k$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^k$, $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ -10 & -4 & -2 \end{pmatrix}^k$.

*d*) Pour $E = \mathbb{R}^3$, donner une base dans laquelle la matrice de la projection sur $\mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(e_3)$ soit triangulaire supérieure mais non diagonale.

*e*) Dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, donner toutes les matrices triangulaires diagonalisables dont les coefficients sont $0$, $1$ ou $2$ et telles que chacune des lignes, colonnes ou diagonales descendantes (// à la principale) est une suite croissante (au sens large), à l'exception des trois zéros nécessaires pour que la matrice soit bien triangulaire supérieure. Même question pour les matrices non diagonalisables.

*f*) Résoudre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ : ① $M^2 = I$. ② $M^2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ -10 & -4 & -2 \end{pmatrix}^2$.

- *Réponses* :

*a*) Si $M$ est de rang $1$, cela signifie que ses colonnes sont toutes des multiples d'un vecteur colonne unique $C : {}^t(x_1, x_2, .., x_n)$ (pour gagner de la place).

- *Remarque (dont on peut se passer, mais intéressante)* : $M = (\alpha_1.C\ \ \alpha_2.C\ \ ...\ \ \alpha_n.C) = CL$ avec $L = (\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ ...\ \ \alpha_n)$, ce qui permet de vérifier magistralement la formule $\mathrm{Tr}(CL) = \mathrm{Tr}(LC)$ car $LC = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n)$.

$C$ est non nulle, sinon $M$ ne serait pas de rang $1$ ; on peut donc appliquer le théorème du rang et en déduire que $\dim(\mathrm{Ker}(M)) = n - 1$ en assimilant les matrices aux endomorphismes donnés par ces matrices dans la base canonique de $E = \mathbb{R}^n$. Comme $\mathrm{Im}(M) = \mathrm{Vect}(C)$ alors il existe un réel $\mu$ tel que : $M.C = \mu.C$ ; si $\mu \neq 0$, alors il existe une base de vecteurs propres car $\mathrm{Ker}(M) = E_0$ et $\mathrm{Vect}(C) = \mathrm{Im}(M) = E_\mu$, soit $B' = (C, u_2, ..., u_n)$ cette base, de matrice de passage $P$. Alors :

$M = P^{-1}.\begin{pmatrix} \mu & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}.P$, d'où l'on déduit : $Tr(M) = \mu \neq 0$.

Si $\mu = 0$, alors $C \in Ker(M)$, mais il existe un vecteur $u_1$ tel que $M.u_1 = C$. Si $(C, u_3, u_4, ..., u_n)$ est une base de $Ker(M)$ alors $B' = (u_1, C, u_3, ..., u_n)$ est une base de $E$ (car $u_1$ n'est pas dans $Ker(M)$). Si $P$ est la matrice de $B'$, alors :

$M = P^{-1}.\begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 \\ 1 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}.P$ , d'où l'on déduit : $Tr(M) = 0$ . On en déduit aussi que $\det(M - \lambda I) = (-\lambda)^n$ , et il n'existe que $(n - 1)$ vecteurs propres, sinon $M$ serait la matrice nulle. Elle n'est donc pas diagonalisable. (Il faut maintenant rédiger le fait que l'ensemble de ces deux assertions est bien une preuve de l'équivalence demandée).

*b*) Soit $f$ l'application de matrice $M$ dans la base canonique, et $B' = (u_1, u_2, ..., u_n)$ une base dans laquelle la matrice de $f$ est $T$ triangulaire supérieure, avec les valeurs propres rangées par ordre croissant dans la diagonale (*donc, les valeurs propres égales sont consécutives*). On constate, en notant $T = (a_{ij})$, et si $a_{1i} \neq 0$, qu'en remplaçant $u_i$ dans $B'$ par $u_1' = u_i + \frac{a_{1i}}{\lambda_i - \lambda_1}.u_1$, qu'on supprime le coefficient de la première ligne à la colonne $i$ ; en appliquant le même procédé ligne par ligne, on aboutit au résultat souhaité.

*c*1) Nul pour $k \geq 2$. *c*2) Il est plus rapide de calculer $(M^2)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 15 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$. *c*3) Cas général : $\begin{pmatrix} 1 & 2^k-1 \\ 0 & 2^k \end{pmatrix}$ (récurrence ou diagonalisation).

*c*4) On remarque que $e_1 + e_2$ et $e_1 - e_2$ sont des vecteurs intéressants ; alors $T = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

*c*5) $P\begin{pmatrix} 2^k & k2^k & k(k+3)2^{k-2} \\ 0 & 2^k & k2^{k-1} \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}P^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ d'où $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. En outre $T = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

*d*) N'importe laquelle si on met un coefficient non nul dans la colonne où la valeur propre est de multiplicité 1, à savoir celle de $e_3$.

*e*) Il y en a 12 : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ; $\begin{pmatrix} 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $(x, y) \in \{(0, 0), (0, 1), (1, 1)\}$ ; $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ; $\begin{pmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ avec $(x, y, z) \in \{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 1), (0, 1, 2), (1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 2)\}$.

- Il y en a 17 non diagonalisables.

*f*) ① Ce sont les matrices de symétries : $\pm I$, et : $PDP^{-1}$ pour $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. On peut se référer au paragraphe 3).

② On trigonalise d'abord la matrice, comme en *c*5) : $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ; on pose $N = P^{-1}MP$, et on résout $N^2 = T^2$, c'est-à-dire : $(NT^{-1})^2 = I$. Ainsi, si $S$ est une solution de la question ①, à savoir une matrice de symétrie, alors $N = ST$ est une solution de $N^2 = T^2$, donc : $M = PSTP^{-1}$ est une solution de la question ② (*on obtiendrait les mêmes solutions avec $PTSP^{-1}$*).

- *Remarque* : En posant $U = Ker(N - T)$ et $V = Ker(N + T)$, $U$ et $V$ sont supplémentaires. En effet, si $u \in U \cap V$, alors $Tu = -Tu$, donc $Tu = 0_E$ ; et comme $T$ est inversible, alors $u = 0_E$, donc : $U \cap V = \{0_E\}$. Par ailleurs : $\forall$ u E, $u = \frac{1}{2}.((N + T).T^{-1}u - (N - T).T^{-1}u)$, on a donc bien $U \oplus V = E$. (*Cf. §16*).

## 13) Produit de matrices triangulaires (*hors programme*).

On note $d_1$ la diagonale principale, $d_2$ la suivante, etc.. On dit qu'une diagonale est nulle si tous ses coefficients sont nuls (on s'autorisera l'écriture $d_i = 0$). Étant donnée une matrice triangulaire supérieure $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $r(T)$ le plus petit rang dont la diagonale est non nulle (donc $1 \leq r(T) \leq n$). Par exemple, si $r(T) \geq 2$, alors la matrice est triangulaire stricte, si $r(t) = n$ c'est la matrice nulle, notée ici : $\Theta$.

- *Proposition* : $T_1$ et $T_2$ étant des matrices triangulaires, si $r(T_1) + r(T_2) \geq n + 2$ alors $T_1T_2 = \Theta$.

- *Preuve* : Les lignes de $T_1$ ont leur premier coefficient non nul à la $r(T_1)$-ième place ; et les coefficients des colonnes de $T_2$ sont nuls à partir du $(n - r(T_2) + 1)$-ième rang. Les $n - r(T_1) + 1$ coefficients non nuls des lignes de $T_1$ doivent être multipliés par les $r(T_2) - 1$ coefficients nuls des colonnes de $T_2$, tandis que les $n - r(T_2) + 1$ coefficients non nuls de la colonne doivent être multipliés par les $r(T_1) - 1$ coefficients nuls de la ligne. Il suffit donc que : $n - r(T_1) + 1 \leq r(T_2) - 1$, et : $n - r(T_2) + 1 \leq r(T_1) - 1$, ce qui dans les deux cas revient à l'énoncé de la proposition : $r(T_1) + r(T_2) \geq n + 2$.

- *Proposition* : Si $r(T_1) + r(T_2) \leq n + 1$ alors $r(T_1T_2) \geq r(T_1) + r(T_2) - 1$.

- *Preuve* : La première ligne de $T_1$ a son premier coefficient susceptible d'être non nul au rang $r(T_1)$ ; celui-ci peut rencontrer le premier coefficient susceptible d'être non nul de $T_2$ à la ligne $r$ de la colonne dont la diagonale arrive à la première ligne et à la colonne $r(T_2)$ de $T_2$. C'est donc la colonne $r(T_1) + r(T_2) - 1$ (*première diagonale non nulle de $T_2$ : ligne 1 colonne $r(T_2)$, ligne 2 colonne $r(T_2) + 1$, ..., ligne $r(T_1)$ colonne $r(T_2) + r(T_1) - 1$*). Alors $r(T_1T_2)$ est au moins égal à cette valeur.

- *Corollaire* : Si $T_1, T_2, ..., T_k$ sont telles que $r(T_1) + r(T_2)+ ... + r(T_k) \geq n + 2$ alors $T_1T_2...T_k = \Theta$.

- *Applications* : Si $r(T) \geq 2$, alors l'ordre de nilpotence de $T$ est au plus égal à $-E(n/(1 - r(T)))$ (où $E()$ désigne la partie entière). Réciproquement, si l'ordre de nilpotence de $T$ est $p$, alors $r(T) \leq 1 + n/(p - 1)$. En outre, pour :

$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $S^3 = \Theta$ ; l'ordre de nilpotence est $3$ et non $5$. On ne peut donc pas obtenir l'égalité.

- *Preuve* : À noter que $-E(-x) = E(x) = x$ s'il est entier, et $-E(-x) = E(x) + 1$ s'il n'est pas entier. Ceci car $E(n/(r(T) - 1))$ peut ne pas suffire si $n$ n'est pas divisible par $r(T) - 1$. On remarque pour conclure que c'est une application directe de la proposition précédente. Quand on inverse l'inégalité sur $r(T)$, on obtient $r(T) \leq 1 + n/p$ dans le cas où $n$ est divisible par $r - 1$, et $r(T) \leq 1 + n/(p - 1)$ sinon ; il suffit donc de conserver le plus grand des deux termes.

*Autre application* : Soit $T$ triangulaire supérieures stricte, et $p = -E(n/(1 - r(T)))$, alors quelles que soient les matrices triangulaires supérieures $S_1, S_2, S_{p-1}$ : $TS_1TS_2...TS_{p-1}T = \Theta$. (Grâce au corollaire ; la raison en est que la matrice nulle est alors obtenue uniquement grâce aux décalages de diagonales).

En particulier si $M$ est trigonalisable, $M = P(D + T)P^{-1}$ où $D$ est diagonale et $T$ triangulaire stricte, alors : $M^k = P(D + T)^kP^{-1}$, et lorsque $D$ et $T$ ne commutent pas (si $D$ n'est pas multiple de $I$), on peut limiter le nombre de produits à calculer. C'est utile, par exemple, si on veut connaître une série de la matrice $M$.

- *Remarque* : Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ toute matrice est semblable à une matrice triangulaire supérieure ; toute matrice nilpotente d'ordre $r$ est donc semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte d'ordre $r$. Ceci permet, entre autre, de résoudre les équations matricielles du type $M^k = 0$.

- *Opération "*"* : On note $d_p(S)$ la p-ième diagonale de $S$, $d_q(T)$ la q-ième de $T$, avec :

$$S = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1,n-1} & b_{1,n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2,n-1} & b_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & b_{n-1,n-1} & b_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Soit alors l'opération "*" sur les diagonales :

$d_p(S)*d_q(T) = (a_{k,p-1+k}b_{p-1+k,p+q-2+k})_{1 \leq k \leq n-q+1}$ (le résultat étant une diagonale).

Cette opération revient à faire les produits en décalant les termes, de $p - 1$ lignes vers le bas dans la deuxième diagonale (ou, en effectuant les produits de bas en haut, de $q - 1$ lignes vers le haut dans la première diagonale) :

- *Exemple* : Pour $n = 5$, $d_3(S)*d_2(T) = \begin{pmatrix} a_{13} & & \\ & a_{24} & \\ & & a_{35} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} b_{12} & & & \\ & b_{23} & & \\ & & b_{34} & \\ & & & b_{45} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{13}b_{34} & \\ & a_{24}b_{45} \end{pmatrix}$ (décalage de deux lignes vers le bas).

Alors : $\boxed{d_m(ST) = \sum_{p+q=m+1} d_p(S)*d_q(T)}$, pour $p \geq 1$, $q \geq 1$ et $m \geq 1$, car cette formule est valable pour des matrices triangulaires supérieures non strictes.

- *Remarque* : Cette formule permet, entre autre, de présenter autrement les démonstrations des propositions qui la précède.

14) <u>Familles libres de puissances de matrices</u> (*hors programme*).

*a*) Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice triangulaire supérieure, par blocs triangulaires, la diagonale de chaque bloc étant une valeur propre. Autrement dit :

Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est semblable à $\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & A_{m-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & A_m \end{pmatrix}$, où $A_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & a_{k,1,2} & \dots & a_{k,1,n_k-1} & a_{k,1,n_k} \\ 0 & \lambda_k & \ddots & a_{k,2,n_k-1} & a_{k,2,n_k} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \lambda_k & a_{k,n_k-1,n_k} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_k \end{pmatrix}$, avec :

$n_1 + n_2 + \dots + n_m = n$ ($n_k$ est l'ordre de multiplicité de $\lambda_k$ dans le polynôme caractéristique de la matrice initiale).

*b*) **Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, étant donnée une matrice $M$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la famille $(I, M, M^2, M^3, \dots, M^n)$ est liée**.

- *Preuve* : On utilise le théorème de Cayley-Hamilton, le polynôme caractéristique est un polynôme annulateur.

*c*) **Il existe des matrices $M$ telles que $(I, M, M^2, M^3, \dots, M^{n-1})$ soit libre**.

- *Exemple* : $M = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \end{pmatrix}$, où les $a_i$ sont tous distincts deux à deux.

- *Preuve* : En considérant les diagonales des matrices $I, M, M^2, \dots, M^{n-1}$, comme des vecteurs colonnes respectifs $d_0, d_1, \dots, d_{n-1}$, alors le déterminant $\det(d_0, d_1, \dots, d_{n-1})$ est un déterminant de Vandermonde, non nul dès lors que les $a_i$ sont distincts deux à deux.

*d*) Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et $k \in [\![1, n-1]\!]$. Il ne suffit pas qu'il existe une base $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ de $\mathbb{K}^n$ telle que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la famille $(u_i, Mu_i, M^2u_i, \dots, M^ku_i)$ soit liée, pour que $(I, M, M^2, \dots, M^k)$ soit liée.

- *Preuve* : Pour $k = 1$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ vérifient l'hypothèse et sont linéairement indépendantes.

- *Proposition* : Si pour tout vecteur $u$ de $\mathbb{K}^n$, $(u, Mu, M^2u, \dots, M^ku)$ est liée, alors $(I, M, M^2, \dots, M^k)$ est liée.

- *Remarque* : La démonstration de cette proposition n'utilise pas le fait qu'il s'agisse de puissances de la même matrice, et pourrait aussi bien s'appliquer à une famille quelconque de matrices :

Si pour tout vecteur $u$ de $\mathbb{K}^n$, $(M_0u, M_1u, M_2u, \dots, M_ku)$ est liée, alors $(M_0, M_1, M_2, \dots, M_k)$ est liée.

*e*) **Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et $k \in [\![1, n-1]\!]$. La famille $(I, M, M^2, \dots, M^k)$ est libre si et seulement s'il existe un vecteur colonne $u \in \mathbb{K}^n$ tel que $(u, Mu, M^2u, \dots, M^ku)$ soit libre**. (*Il y a donc aussi équivalence dans la proposition précédente*).

- *Preuve* : Soit $f$ l'endomorphisme de matrice $M$ dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$. On suppose qu'il existe un vecteur $u$ de $\mathbb{K}^n$ tel que la famille $(u, Mu, M^2u, \dots, M^ku)$, c'est-à-dire $(u, f(u), f^2(u), \dots, f^k(u))$, soit libre. On complète $u$ avec les vecteurs de la base canonique pour obtenir une nouvelle base $B'$ dans laquelle la matrice de $f$ sera $N$ ; alors, en notant $C_i$ la première colonne de $N^i$ :

$(u, f(u), f^2(u), \dots, f^k(u))$ devient dans $B'$ : $(C_0, C_1, \dots, C_k)$. Par suite : $\alpha_0.N^0 + \alpha_1.N^1 + \dots + \alpha_k.N^k = 0 \Rightarrow \alpha_0.C_0 + \alpha_1.C_1 + \dots + \alpha_k.C_k = 0 \Rightarrow \alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$, car c'est une famille libre ; ce qui prouve par la même occasion que $(I, N, N^2, \dots, N^k)$, donc aussi $(I, M, M^2, \dots, M^k)$, est libre.

Réciproquement, on suppose vraie la négation de la proposition, à savoir que pour tout $u$ non nul il existe une combinaison linéaire non nulle : $\alpha_0(u)u + \alpha_1(u)Mu + \dots + \alpha_k(u)M^ku = 0_E$. Alors, cette négation étant l'énoncé de la proposition précédente, c'est en contradiction avec le fait que $(I, M, M^2, \dots, M^k)$ soit libre.

- *Exemple* : Si $M$ est nilpotente d'ordre $k+1$, alors il existe au moins un vecteur colonne $u$ tel que $M^ku \neq 0_E$ (car $M^k$ n'est pas la matrice nulle par hypothèse, l'ordre de nilpotence étant $k+1$) ; $u$ est tel que $(u, Mu, M^2u, \dots, M^ku)$ soit libre (on le prouve en écrivant une combinaison linéaire, et en la multipliant par $M$ en faisant jouer la nilpotence), d'où l'on déduit que $(I, M, M^2, \dots, M^k)$ est libre.

15) <u>Matrices des projecteurs et symétries de $\mathbb{R}^3$</u> (*hors programme*).

• Matrice d'un projecteur de $\mathbb{R}^3$ : Soit $(u_1, u_2, u_3)$ une base dont les vecteurs sont donnés respectivement dans la base canonique par les vecteurs colonnes $U_1, U_2, U_3$. La matrice $M$ dans la base canonique de la projection $p_1$ sur $\mathrm{Vect}(u_1)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(u_2, u_3)$ est :

$M_1 = \dfrac{U_1\times{}^t(U_2\wedge U_3)}{{}^tU_1\times(U_2\wedge U_3)}$, (en notant que le produit vectoriel peut être défini sans connaissance du produit scalaire), avec en outre :

${}^t(U_2\wedge U_3)\times U_1 = \det(U_1, U_2, U_3)$.

Alors la matrice de $p_2$ la projection sur $\mathrm{Vect}(u_2)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(u_1, u_3)$ est : $M_2 = \dfrac{U_2\times{}^t(U_3\wedge U_1)}{{}^tU_2\times(U_3\wedge U_1)}$, et celle de $p_3$ la projection sur $\mathrm{Vect}(u_3)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(u_1, u_2)$ est : $M_3 = \dfrac{U_3\times{}^t(U_1\wedge U_2)}{{}^tU_3\times(U_1\wedge U_2)}$ ; avec : $M_1 + M_2 + M_3 = I$.

($M_2 + M_3$ est donc, par exemple, la matrice de la projection sur $\mathrm{Vect}(u_2, u_3)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(u_1)$). On retrouve aussi la formule d'inversion des matrices $3\times3$ (avec ${}^tU_1\times(U_2\wedge U_3) = {}^tU_2\times(U_3\wedge U_1) = {}^tU_3\times(U_1\wedge U_2) = \det(U_1, U_2, U_3)$) :

$U_1\times{}^t(U_2\wedge U_3) + U_2\times{}^t(U_3\wedge U_1) + U_3\times{}^t(U_1\wedge U_2) = (U_1\ \ U_2\ \ U_3)\times{}^t(U_2\wedge U_3\ \ \ U_3\wedge U_1\ \ \ U_1\wedge U_2) = \det(U_1, U_2, U_3).I$.

On peut généraliser ces formules à la dimension $n$, en notant $\mathrm{Co}(U_1)$ la matrice colonne des cofacteurs de $U_1$ (dans la matrice $(U_1\ \ U_2 \dots U_n)$), la matrice de $p_1$ est : $M_1 = \dfrac{U_1\times{}^t\mathrm{Co}(U_1)}{{}^tU_1\times \mathrm{Co}(U_1)}$, avec : ${}^tU_1\times\mathrm{Co}(U_1) = \det(U_1, U_2, \dots, U_n)$. Etc..[1]

• Matrice d'une symétrie de $\mathbb{R}^3$ : Elles sont toutes de la forme $\pm I$ ou $\pm P\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1}$, $P$ étant une matrice inversible dont les colonnes sont les composantes des vecteurs propres dans la base initiale. On peut montrer qu'elles se ramènent au douze types de matrices suivants (six en ne comptant pas le signe) :

$$\pm\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad \pm\begin{pmatrix}1-ab&0&(2-ab)b\\abc&1&(ab-2)bc\\a&0&ab-1\end{pmatrix},\quad \pm\begin{pmatrix}1&0&0\\ad&abc-1&-ab\\acd&(abc-2)c&1-abc\end{pmatrix},\quad \pm\begin{pmatrix}a&1/d&b\\(1-a)(a+bcd+1)d&-a-bcd&-(a+bcd+1)bd\\(a-1)cd&c&bcd+1\end{pmatrix},$$

$$\pm\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\a&b&-1\end{pmatrix},\quad \pm\begin{pmatrix}-1&0&b\\-2a&1&ab\\0&0&1\end{pmatrix},$$ où $a, b, c, d$ sont des paramètres réels.

16) <u>Matrices d'ordre 3 de carré triangulaire</u> (*hors programme*).

On cherche $M = \begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{pmatrix}$ telle que $M^2$ soit triangulaire supérieure. Le calcul donne les trois équations suivantes : $\begin{cases}(a_1+b_2)a_2 + c_2a_3 = 0\\(b_2+c_3)b_3 + b_1a_3 = 0\\a_2b_3 + (a_1+c_3)a_3 = 0\end{cases}$.

On discute selon les cas : (*1*) $a_3 = 0$ ; (*1.1*) $b_3 \neq 0$ ; (*1.2*) $b_3 = 0$ et $a_2 \neq 0$ ; (*1.3*) $b_3 = a_2 = 0$ ; (*2*) $a_3 \neq 0$.

On obtient ainsi les quatre matrices suivantes, en posant $\alpha_3 = 1/a_3$ dans la dernière :

$$M_1 = \begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1\\0&b_2&c_2\\0&0&c_3\end{pmatrix};\ M_2 = \begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1\\0&b_2&c_2\\0&b_3&-b_2\end{pmatrix};\ M_3 = \begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&-a_1&c_2\\0&0&c_3\end{pmatrix};\ M_4 = \begin{pmatrix}a_1&(a_1-b_2+a_2b_3\alpha_3)b_3\alpha_3&c_1\\a_2&b_2&-(a_1+b_2)a_2\alpha_3\\1/\alpha_3&b_3&-a_1-a_2b_3\alpha_3\end{pmatrix}.$$

On peut, par exemple, utiliser ce résultat pour résoudre une équation du type $M^2 = A$ ; ou $A$ est trigonalisable (ce qui est toujours le cas dans $\mathbb{C}$), où l'on se ramène à une équation du type $X^2 = B$, ou $B$ est triangulaire supérieure. Il est très simple de trouver toutes les solutions triangulaires supérieures, et on trouve les autres grâce aux

[1] À noter que ce vecteur formé des cofacteurs s'appelle toujours le produit vectoriel de $(U_2, U_3, \dots, U_n)$. Dans un espace euclidien de dimension $n$, le produit vectoriel des $n - 1$ vecteurs $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ est l'unique vecteur $w$ tel que pour tout vecteur $x$ on ait l'égalité : $\det(v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, x) = (w|x)$.

matrices $M_2$, $M_3$, $M_4$. Le carré des deux premières étant particulier, il est le plus souvent possible de les éliminer d'emblée car il faudrait que $B$ ait un zéro à un certain endroit et qu'il ait deux valeurs égales dans sa diagonale :

$$M_2^2 = \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1b_1 + b_1b_2 + b_3c_1 & a_1c_1 + b_1c_2 - b_2c_1 \\ 0 & b_2^2 + b_3c_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_2^2 + b_3c_2 \end{pmatrix},\ M_3^2 = \begin{pmatrix} a_1^2 + a_2b_1 & 0 & a_1c_1 + b_1c_2 + c_1c_3 \\ 0 & a_1^2 + a_2b_1 & a_2c_1 - a_1c_2 + c_2c_3 \\ 0 & 0 & c_3^2 \end{pmatrix}.$$

Quant à la troisième, la première valeur de la diagonale doit être égale à la troisième.

Cependant, pour certaines matrices triangulaires ayant des valeurs négatives dans la diagonale, où il est impossible de trouver une solution triangulaire, on peut trouver des solutions avec les matrices ci-dessus.

Exemple : $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

On reconnaît une matrice du type de $M_2^2$, et on obtient :

$$a_1 = \pm 1,\ b_1 = -\tfrac{1}{2}.((b_2 - a_1)x + b_3y),\ c_1 = \tfrac{1}{2}.((b_2 + a_1)y - c_2x),\ b_3c_2 = -1 - b_2^2.$$

On peut donner une valeur à $a_1$, puis à deux des trois paramètres de la dernière équation, et il en résulte les valeurs du dernier paramètre de cette équation, de $b_1$ et de $c_1$.

Par exemple : $M = \begin{pmatrix} 1 & (x-y)/2 & (x+y)/2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

17) <u>Résolution de : $M^2 = A$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sous certaines conditions nécessaires</u> (*hors programme*).

• *Condition nécessaire* **CN1** : Il faut que $A$ soit trigonalisable : $A = PBP^{-1}$ (B peut aussi bien être triangulaire inférieure ou supérieure, voire diagonale).

On résout donc à la place : $X^2 = B$, et ensuite $(PXP^{-1})^2 = A$ ; donc : $M = PXP^{-1}$.

• *Condition nécessaire* **CN2** : Il faut qu'il existe une matrice triangulaire $T$ telle que $T^2 = B$.

Elle n'existe pas toujours ; par exemple, dans $\mathbb{R}$, les coefficients diagonaux de $B$ doivent être positifs. Il y a aussi des cas, dans $\mathbb{C}$, où le fait d'avoir deux coefficients diagonaux de signes opposés rend l'opération impossible. Etc.

Pour savoir si cette matrice existe, on peut résoudre un système d'équations qui se résout de proche en proche, en partant de la diagonale principale vers les autres diagonales. Par exemple, en dimension 4 :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a_{11}^2 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21}(a_{11}+a_{22}) & a_{22}^2 & 0 & 0 \\ a_{31}(a_{11}+a_{33})+a_{21}a_{32} & a_{32}(a_{22}+a_{33}) & a_{33}^2 & 0 \\ a_{41}(a_{11}+a_{44})+a_{21}a_{42}+a_{31}a_{43} & a_{42}(a_{22}+a_{44})+a_{32}a_{43} & a_{43}(a_{33}+a_{44}) & a_{44}^2 \end{pmatrix}.$$

On trouve d'abord $a_{11}$, $a_{22}$, $a_{33}$, $a_{44}$ dans la diagonale principale ; le fait de les connaître permet d'obtenir $a_{21}$, $a_{32}$, $a_{43}$ dans la diagonale suivante ; ce qui permet de poursuivre avec $a_{31}$, $a_{42}$ ; puis finalement $a_{41}$.

Le processus est exactement le même aux dimensions supérieures.

• *Condition nécessaire* **CN3** : Il faut que $A$ soit inversible. Cette condition implique notamment que $B$ et $T$ sont elles-mêmes inversibles (donc : pas de 0 dans la diagonale de B ni de T).

Par suite, il ne reste plus qu'à résoudre : $(XT^{-1})^2 = I$ ; il en résulte que si $S$ est une matrice de symétrie quelconque (cf. §3), alors $X = ST$ est solution de $X^2 = B$, et réciproquement. Finalement : $M = PSTP^{-1}$ (en remarquant qu'on pourrait tout aussi bien écrire $M = PTSP^{-1}$ et obtenir les mêmes solutions, mais : $(ST)^2 = T^2 \Rightarrow TS = ST$).

- *Remarques* : • $U = \mathrm{Ker}(X - T)$ et $V = \mathrm{Ker}(X + T)$ sont supplémentaires.

- *Preuve* : On note $E$ l'espace des matrices colonnes. Soit $u \in U \cap V$ ; alors $Xu = Tu = -Tu$ donc $Tu = 0_E$, donc $u = 0_E$ d'après la CN3. Et ainsi : $U \cap V = \{0_E\}$.

Soit un vecteur $u$ quelconque, $v = (X + T)u$ et $w = (X - T)u$ ; on a : $Tu = v/2 - w/2$, donc : $U + V = T(E) = E$ d'après la CN3. On a donc bien : $U \oplus V = E$.

• Il est évidemment plus simple de résoudre directement $M^2 = A^2$ avec $A$ inversible, où : $(MA^{-1})^2 = I$.

18) <u>Formule de Taylor pour les polynômes de matrices</u> (*hors programme*).

Étant donné un entier naturel non nul $r$, les entiers naturels non nuls $p_1, p_2, \ldots, p_r$, et les matrices $A_1, A_2, \ldots, A_r$, carrées d'ordre $n$, où $p_1 + p_2 + \ldots + p_r \leq n + r - 1$, on définit les fonctions $\phi$ de la façon suivante :

En notant, pour $k \in [\![1, r]\!]$ : $A_k = (a_{k,i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$, alors : $\phi_{p_1, p_2, \ldots, p_r}(A_1, A_2, \ldots, A_r) =$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1,p_1} a_{2,p_1,p_1+p_2-1} a_{3,p_1+p_2-1,p_1+p_2+p_3-2} \cdots a_{r,p_1+p_2+\ldots+p_{r-1}-r+2,p_1+p_2+\ldots+p_r-r+1} \\ a_{1,2,p_1+1} a_{2,p_1+1,p_1+p_2} a_{3,p_1+p_2,p_1+p_2+p_3-1} \cdots a_{r,p_1+p_2+\ldots+p_{r-1}-r+3,p_1+p_2+\ldots+p_r-r+2} \\ \vdots \\ a_{1,n+r-p_1-p_2-\ldots-p_r,n+r-1-p_2-p_3-\ldots-p_r} a_{2,n+r-1-p_2-p_3-\ldots-p_r,n+r-2-p_3-p_4-\ldots-p_r} \cdots a_{r,n+1-p_r,n} \end{pmatrix}$$

- *Remarques* : Lorsque $A_1 = A_2 = \ldots = A_r = A$, on notera plus rapidement $\phi_{p_1, p_2, \ldots, p_r}(A)$.

Avec un seul indice, $\phi_k(A)$ est la $k$-ième diagonale de $A$, en numérotant $1$ la diagonale principale et en incrémentant de la gauche vers la droite.

Avec deux indices, si $A$ et $B$ sont triangulaires supérieures, on peut exprimer toutes les diagonales du produit $AB$ ; pour $k \geq 2$ (démonstration dans le DS2_2009_2010) :

$$\phi_k(AB) = \sum_{p=1}^{k} \phi_{p,k+1-p}(A, B).$$

Par ailleurs : $\phi_{p_1, p_2, \ldots, p_r}$ est $r$-linéaire. C'est une sorte de produit entre la $p_1$-ème diagonale de $A_1$, avec la $p_2$-ième diagonale de $A_2$, jusqu'à la $p_r$-ième diagonale de $A_r$. En notant $\pi_{i,j}(A)$ la matrice formée par la ligne $i$ à la ligne $j$ incluses de $A$, alors : $\phi_{p_1, p_2, \ldots, p_r}(A_1, A_2, \ldots, A_r) =$

$$\pi_{1,n+r-p_1-p_2-\ldots-p_r}(\phi_{p_1}(A_1)).\pi_{p_1,n+r-1-p_2-p_3-\ldots-p_r}(\phi_{p_2}(A_2)).\ldots.\pi_{p_1+p_2+\ldots+p_{r-1}-r+2,n+1-p_r}(\phi_{p_r}(A_r)).$$

• Soit $A = \begin{pmatrix} x & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ 0 & x & \ldots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & x & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & x \end{pmatrix}$.

- *Proposition 1* : $\phi_1(A^m) = x^m.\phi_1(I)$, et pour $k \geq 2$ :

$$\boxed{\phi_k(A^m) = \sum_{q=1}^{\min(m,k-1)} \frac{e_m^{(q)}(x)}{q!} . \sum_{\substack{p_1+p_2+\ldots+p_q=k+q-1 \\ p_i \geq 2}} \phi_{p_1, p_2, \ldots, p_q}(A)}.$$

Où : $e_q(x) = x^q$, et : $\dfrac{e_m^{(q)}(x)}{q!} = \dbinom{m}{q}.x^{m-q}$.

- *Lemme* : $\displaystyle\sum_{q=1}^{\min(m,\,k-2)} \sum_{p=2}^{k-q} y_{p,q} = \sum_{q=1}^{\min(m,\,k-2)} (y_{2,q} + y_{3,q} + \ldots + y_{k-q-1,q} + y_{k-q,q}) =$

$(y_{2,1} + y_{3,1} + \ldots + y_{k-2,1} + y_{k-1,1}) + (y_{2,2} + y_{3,2} + \ldots + y_{k-3,2} + y_{k-2,2}) + \ldots +$
$(y_{2,\min(m,k-2)-1} + y_{3,\min(m,k-2)-1} + \ldots + y_{k-\min(m,k-2),\min(m,k-2)-1} + y_{k-\min(m,k-2)+1,\min(m,k-2)-1}) +$

$$(y_{2,\min(m,k-2)} + y_{3,\min(m,k-2)} + \ldots + y_{k-\min(m,k-2)-1,\min(m,k-2)} + y_{k-\min(m,k-2),\min(m,k-2)}).$$

En remarquant que la dernière ligne est vide si $\min(m, k-1) = k-1$, tandis que l'avant-dernière ne contient que le seul terme $y_{2,k-2}$.

On réunit ensuite les termes autrement : $\displaystyle\sum_{q=1}^{\min(m,\,k-2)} \sum_{p=2}^{k-q} y_{p,q} =$

$$(y_{2,1} + y_{2,2} + \ldots + y_{2,\min(m,k-2)}) + (y_{3,1} + y_{3,2} + \ldots + y_{3,\min(m,k-2)}) + \ldots + (y_{k-1,1}).$$

Finalement : $\displaystyle\sum_{q=1}^{\min(m,\,k-2)} \sum_{p=2}^{k-q} y_{p,q} = \sum_{p=2}^{k-1} \sum_{q=1}^{\min(m,\,k-p)} y_{p,q}.$

- *Preuve du théorème* : Il est simple de prouver la première partie par récurrence car la diagonale ne se multiplie qu'avec elle-même :

$$\phi_1(A^m) = x^m.\phi_1(I).$$

On suppose donc $k \geq 2$, et on prouve également la suite du théorème par récurrence ; l'initialisation à $m = 1$ est triviale. On suppose la propriété vraie jusqu'au rang $m$, et on la considère au rang $m+1$ :

$$\phi_k(A^{m+1}) = \sum_{q=1}^{\min(m+1,k-1)} \binom{m+1}{q}.x^{m+1-q}.\sum_{\substack{p_1+p_2+\ldots+p_q=k+q-1\\ p_i\geq 2}} \phi_{p_1,p_2,\ldots,p_q}(A) =$$

$$\sum_{q=1}^{\min(m+1,k-1)} \binom{m}{q}.x^{m+1-q}.\sum_{\substack{p_1+p_2+\ldots+p_q=k+q-1\\ p_i\geq 2}} \phi_{p_1,p_2,\ldots,p_q}(A) + \sum_{q=1}^{\min(m+1,k-1)} \binom{m}{q-1}.x^{m+1-q}.\sum_{\substack{p_1+p_2+\ldots+p_q=k+q-1\\ p_i\geq 2}} \phi_{p_1,p_2,\ldots,p_q}(A) =$$

$$\sum_{q=1}^{\min(m,k-1)} \binom{m}{q}.x^{m+1-q}.\sum_{\substack{p_1+p_2+\ldots+p_q=k+q-1\\ p_i\geq 2}} \phi_{p_1,p_2,\ldots,p_q}(A) + \sum_{q=1}^{\min(m+1,k-1)} \binom{m}{q-1}.x^{m+1-q}.\sum_{\substack{p_1+p_2+\ldots+p_q=k+q-1\\ p_i\geq 2}} \phi_{p_1,p_2,\ldots,p_q}(A).$$

Car $\binom{m}{m+1} = 0$. Donc : $\phi_k(A^{m+1}) =$

$$\sum_{q=1}^{\min(m,k-1)} \binom{m}{q}.x^{m+1-q}.\sum_{\substack{p_1+p_2+\ldots+p_q=k+q-1\\ p_i\geq 2}} \phi_{p_1,p_2,\ldots,p_q}(A) + \sum_{q=2}^{\min(m+1,k-1)} \binom{m}{q-1}.x^{m+1-q}.\sum_{\substack{p_1+p_2+\ldots+p_q=k+q-1\\ p_i\geq 2}} \phi_{p_1,p_2,\ldots,p_q}(A) + x^m.\phi_k(A) =$$

$$\sum_{q=1}^{\min(m,k-1)} \binom{m}{q}.x^{m+1-q}.\sum_{\substack{p_1+p_2+\ldots+p_q=k+q-1\\ p_i\geq 2}} \phi_{p_1,p_2,\ldots,p_q}(A) + \sum_{q=1}^{\min(m,k-2)} \binom{m}{q}.x^{m-q}.\sum_{\substack{p_1+p_2+\ldots+p_{q+1}=k+q\\ p_i\geq 2}} \phi_{p_1,p_2,\ldots,p_{q+1}}(A) + x^m.\phi_k(A) =$$

$$\sum_{q=1}^{\min(m,k-1)} \binom{m}{q}.x^{m+1-q}.\sum_{\substack{p_1+p_2+\ldots+p_q=k+q-1\\ p_i\geq 2}} \phi_{p_1,p_2,\ldots,p_q}(A) + \sum_{q=1}^{\min(m,k-2)} \binom{m}{q}.x^{m-q}.\sum_{\substack{p_1+p_2+\ldots+p_{q+1}=k+q\\ p_i\geq 2}} \phi_{p_1,p_2,\ldots,p_{q+1}}(A) + x^m.\phi_k(A) \quad \boldsymbol{(E_1)}.$$

On a ci-dessus la première forme possible de $\phi_k(A^{m+1})$. On considère maintenant la seconde forme : $\phi_k(A^{m+1}) = \phi_k(A.A^m)$, en utilisant la propriété démontrée au DS2_2009_2010 ; il faudra ensuite prouver qu'elles sont égales :

$$\phi_k(A^{m+1}) = \sum_{p=1}^{k} \phi_{p,k+1-p}(A, A^m).$$

En notant $b_{i,j}$ les coefficients de $A^m$ : $\phi_k(A^{m+1}) =$

$$\sum_{p=1}^{k}\begin{pmatrix} a_{1,p}\\ a_{2,p+1}\\ \vdots\\ a_{n-k,n-k+p-1}\\ a_{n-k+1,n-k+p}\end{pmatrix}\boldsymbol{.}\begin{pmatrix} b_{p,k}\\ b_{p+1,k+1}\\ \vdots\\ b_{n-k+p-1,n-1}\\ b_{n-k+p,n}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\\ x\\ \vdots\\ x\\ x\end{pmatrix}\boldsymbol{.}\begin{pmatrix} b_{1,k}\\ b_{2,k+1}\\ \vdots\\ b_{n-k,n-1}\\ b_{n-k+1,n}\end{pmatrix} + \sum_{p=2}^{k-1}\begin{pmatrix} a_{1,p}\\ a_{2,p+1}\\ \vdots\\ a_{n-k,n-k+p-1}\\ a_{n-k+1,n-k+p}\end{pmatrix}\boldsymbol{.}\begin{pmatrix} b_{p,k}\\ b_{p+1,k+1}\\ \vdots\\ b_{n-k+p-1,n-1}\\ b_{n-k+p,n}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{1,k}\\ a_{2,k+1}\\ \vdots\\ a_{n-k,n-1}\\ a_{n-k+1,n}\end{pmatrix}\boldsymbol{.}\begin{pmatrix} x^m\\ x^m\\ \vdots\\ x^m\\ x^m\end{pmatrix} =$$

$$\phi_k(A^{m+1}) = x\boldsymbol{.}\begin{pmatrix} b_{1,k}\\ b_{2,k+1}\\ \vdots\\ b_{n-k,n-1}\\ b_{n-k+1,n}\end{pmatrix} + \sum_{p=2}^{k-1}\begin{pmatrix} a_{1,p}\\ a_{2,p+1}\\ \vdots\\ a_{n-k,n-k+p-1}\\ a_{n-k+1,n-k+p}\end{pmatrix}\boldsymbol{.}\begin{pmatrix} b_{p,k}\\ b_{p+1,k+1}\\ \vdots\\ b_{n-k+p-1,n-1}\\ b_{n-k+p,n}\end{pmatrix} + x^m.\phi_k(A).$$

On applique ensuite l'hypothèse de récurrence : $\displaystyle\phi_k(A^{m+1}) = x^m.\phi_k(A) + x\boldsymbol{.}\sum_{q=1}^{\min(m,k-1)} \binom{m}{q}.x^{m-q}.\sum_{\substack{p_1+p_2+\ldots+p_q=k+q-1\\ p_i\geq 2}} \phi_{p_1,p_2,\ldots,p_q}(A) +$

$$\sum_{p=2}^{k-1}\begin{pmatrix} a_{1,p}\\ a_{2,p+1}\\ \vdots\\ a_{n-k,n-k+p-1}\\ a_{n-k+1,n-k+p}\end{pmatrix}\boldsymbol{.}\sum_{q=1}^{\min(m,k-p)} \binom{m}{q}.x^{m-q}.\sum_{\substack{p_1+p_2+\ldots+p_q=k+q-p\\ p_i\geq 2}} \phi_{p_1,p_2,\ldots,p_q}(A)$$

Les deux premiers termes étant présents dans $(E_1)$, il faut juste transformer le dernier :

$$\sum_{p=2}^{k-1}\sum_{q=1}^{\min(m,k-p)}\binom{m}{q}.x^{m-q}.\begin{pmatrix}a_{1,p}\\a_{2,p+1}\\\vdots\\a_{n-k,n-k+p-1}\\a_{n-k+1,n-k+p}\end{pmatrix}.\sum_{\substack{p_1+p_2+\ldots+p_q=k+q-p\\p_i\geq 2}}\phi_{p_1,p_2,\ldots,p_q}(A).$$

On inverse les deux sigmas : $\displaystyle\sum_{q=1}^{\min(m,\,k-2)}\sum_{p=2}^{k-q}\binom{m}{q}.x^{m-q}.\begin{pmatrix}a_{1,p}\\a_{2,p+1}\\\vdots\\a_{n-k,n-k+p-1}\\a_{n-k+1,n-k+p}\end{pmatrix}.\sum_{\substack{p_1+p_2+\ldots+p_q=k+q-1\\p_i\geq 2}}\phi_{p_1,p_2,\ldots,p_q}(A).$

On obtient ainsi l'autre formule :

$$\sum_{q=1}^{\min(m,k-1)}\binom{m}{q}.x^{m+1-q}.\sum_{\substack{p_1+p_2+\ldots+p_q=k+q-1\\p_i\geq 2}}\phi_{p_1,p_2,\ldots,p_q}(A)\ +\ \sum_{q=1}^{\min(m,\,k-2)}\binom{m}{q}.x^{m-q}.\sum_{p=2}^{k-q}\begin{pmatrix}a_{1,p}\\a_{2,p+1}\\\vdots\\a_{n-k,n-k+p-1}\\a_{n-k+1,n-k+p}\end{pmatrix}.\sum_{\substack{p_1+p_2+\ldots+p_q=k+q-p\\p_i\geq 2}}\phi_{p_1,p_2,\ldots,p_q}(A)\ +$$

$$x^m.\phi_k(A)\quad \boldsymbol{(E_2)}.$$

Il suffit donc d'avoir $(E_1)=(E_2)$, et pour cela, de vérifier que :

$$\sum_{p=2}^{k-q}\begin{pmatrix}a_{1,p}\\a_{2,p+1}\\\vdots\\a_{n-k,n-k+p-1}\\a_{n-k+1,n-k+p}\end{pmatrix}.\sum_{\substack{p_1+p_2+\ldots+p_q=k+q-p\\p_i\geq 2}}\phi_{p_1,p_2,\ldots,p_q}(A)=\sum_{\substack{p_1+p_2+\ldots+p_{q+1}=k+q\\p_i\geq 2}}\phi_{p_1,p_2,\ldots,p_{q+1}}(A).$$

En posant $p_0 = p$, on a : $\displaystyle\sum_{p=2}^{k-q}\begin{pmatrix}a_{1,p}\\a_{2,p+1}\\\vdots\\a_{n-k,n-k+p-1}\\a_{n-k+1,n-k+p}\end{pmatrix}.\sum_{\substack{p_1+p_2+\ldots+p_q=k+q-p\\p_i\geq 2}}\phi_{p_1,p_2,\ldots,p_q}(A)=\sum_{\substack{p_0+p_1+p_2+\ldots+p_q=k+q\\p_i\geq 2}}\phi_{p_0,p_1,p_2,\ldots,p_q}(A)$, ce qui est bien égal à l'autre membre.

- *Proposition 2* : Si $P$ est un polynôme de degré $r$, alors : $\phi_1(P(A)) = P(x).\phi_1(I)$, et pour $k\geq 2$ :

$$\boxed{\phi_k(P(A))=\sum_{q=1}^{\min(r,k-1)}\frac{P^{(q)}(x)}{q!}.\sum_{\substack{p_1+p_2+\ldots+p_q=k+q-1\\p_i\geq 2}}\phi_{p_1,p_2,\ldots,p_q}(A)}.$$

- *Preuve* : Il est simple de prouver la première partie par récurrence car la diagonale ne se transforme qu'avec elle-même :

$$\phi_1(P(A)) = P(x).\phi_1(I).$$

On suppose donc $k \geq 2$, et soit $P(A)=\alpha_0 I+\alpha_1 A+\ldots+\alpha_r A^r$ ; alors, comme les $\phi$ sont linéaires :

$$\phi_k(P(A))=\sum_{m=1}^{r}\alpha_m.\phi_k(A^m)=\sum_{m=1}^{r}\alpha_m.\sum_{q=1}^{\min(m,k-1)}\frac{e_m^{(q)}(x)}{q!}.\sum_{\substack{p_1+p_2+\ldots+p_q=k+q-1\\p_i\geq 2}}\phi_{p_1,p_2,\ldots,p_q}(A)=$$

$$\sum_{m=1}^{r}\sum_{q=1}^{\min(m,k-1)}\alpha_m.\frac{e_m^{(q)}(x)}{q!}.\sum_{\substack{p_1+p_2+\ldots+p_q=k+q-1\\p_i\geq 2}}\phi_{p_1,p_2,\ldots,p_q}(A)=\sum_{q=1}^{\min(r,\,k-1)}\sum_{m=q}^{r}\alpha_m.\frac{e_m^{(q)}(x)}{q!}.\sum_{\substack{p_1+p_2+\ldots+p_q=k+q-1\\p_i\geq 2}}\phi_{p_1,p_2,\ldots,p_q}(A).$$

En appliquant l'inversion des sigmas par une méthode analogue à celle du lemme (*cf. DS3_2009_2010*). Alors :

$$\phi_k(P(A))=\sum_{q=1}^{\min(r,\,k-1)}\Big(\sum_{m=q}^{r}\alpha_m.\frac{e_m^{(q)}(x)}{q!}\Big).\sum_{\substack{p_1+p_2+\ldots+p_q=k+q-1\\p_i\geq 2}}\phi_{p_1,p_2,\ldots,p_q}(A)=\sum_{q=1}^{\min(r,\,k-1)}\frac{P^{(q)}(x)}{q!}.\sum_{\substack{p_1+p_2+\ldots+p_q=k+q-1\\p_i\geq 2}}\phi_{p_1,p_2,\ldots,p_q}(A).$$

- On note désormais $A_x=\begin{pmatrix}x & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n-1} & a_{1,n}\\ 0 & x & \ldots & a_{2,n-1} & a_{2,n}\\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \ddots & x & a_{n-1,n}\\ 0 & 0 & \ldots & 0 & x\end{pmatrix}=x.I+A_0.$

On peut remarquer qu'avec la formule du binôme on obtient facilement l'égalité :

$$P(A)=\alpha_0.I+\alpha_1.A+\alpha_2.A^2+\ldots+\alpha_r.A^r=\sum_{q=0}^{r}x^q.\Big(\sum_{m=q}^{r}\alpha_m.\binom{m}{q}.A_0^{m-q}\Big).$$

Mais ce n'est pas le sujet ici.

- *Proposition 3* : Si $P$ est un polynôme de degré $r$, alors, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ :

$$\phi_k(P(A_{x+h})) = \sum_{m=1}^{r} \frac{P^{(m)}(x)}{m!}.\phi_k(A_h^m).$$

- *Preuve* : Pour $k = 1$ : $\phi_k(P(A_{x+h})) = P(x + h).\phi_1(I) = \sum_{m=1}^{r} \frac{P^{(m)}(x)}{m!}.h^m.\phi_1(I) = \sum_{m=1}^{r} \frac{P^{(m)}(x)}{m!}.\phi_1(A_h^m)$. CQFD.

On suppose ensuite $k \geq 2$.On applique le théorème précédent : $\phi_k(P(A_{x+h})) = \sum_{q=1}^{\min(r,\, k-1)} \frac{P^{(q)}(x+h)}{q!}.\sum_{\substack{p_1+p_2+\ldots+p_q=k+q-1 \\ p_i\geq 2}} \phi_{p_1,p_2,\ldots,p_q}(A)$, et on on utilise ensuite la formule de Taylor à $P^{(q)}$, où pour un polynôme il n'y a pas de reste si on la pousse jusqu'au degré du polynôme, donc :

$$\phi_k(P(A_{x+h})) = \sum_{q=1}^{\min(r,\, k-1)} \frac{1}{q!}.(\sum_{m=q}^{r} \frac{h^{m-q}}{(m-q)!}.P^{(m)}(x)).\sum_{\substack{p_1+p_2+\ldots+p_q=k+q-1 \\ p_i\geq 2}} \phi_{p_1,p_2,\ldots,p_q}(A) =$$

$$\sum_{q=1}^{\min(r,\, k-1)} \sum_{m=q}^{r} \binom{m}{q}.h^{m-q}.\frac{P^{(m)}(x)}{m!}.\sum_{\substack{p_1+p_2+\ldots+p_q=k+q-1 \\ p_i\geq 2}} \phi_{p_1,p_2,\ldots,p_q}(A) =$$

$$\sum_{m=1}^{r} \sum_{q=1}^{\min(m,\, k-1)} \binom{m}{q}.h^{m-q}.\frac{P^{(m)}(x)}{m!}.\sum_{\substack{p_1+p_2+\ldots+p_q=k+q-1 \\ p_i\geq 2}} \phi_{p_1,p_2,\ldots,p_q}(A).$$

En appliquant l'inversion des sigmas par une méthode analogue à celle du lemme (*cf. DS3_2009_2010*). Alors :

$$\phi_k(P(A_{x+h})) = \sum_{m=1}^{r} \frac{P^{(m)}(x)}{m!}.\sum_{q=1}^{\min(m,\, k-1)} \binom{m}{q}.h^{m-q}.\sum_{\substack{p_1+p_2+\ldots+p_q=k+q-1 \\ p_i\geq 2}} \phi_{p_1,p_2,\ldots,p_q}(A) = \sum_{m=1}^{r} \frac{P^{(m)}(x)}{m!}.\phi_k(A_h^m).$$

- *Proposition 4* : Si $P$ est un polynôme de degré $r$, alors : $\boxed{P(A_{x+h}) = \sum_{m=1}^{r} \frac{P^{(m)}(x)}{m!}.A_h^m}$.

- *Preuve* : C'est vrai car les deux membres ont toutes leurs colonnes égales deux à deux, c'est un corollaire de la proposition précédente.

• On considère maintenant une matrice triangulaire par blocs : $A_{x_1,x_2,\ldots,x_d} = \begin{pmatrix} A_{x_1} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & A_{x_2} & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & A_{x_{d-1}} & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & A_{x_d} \end{pmatrix}$.

- *Proposition 5* : Si $P$ est un polynôme de degré $r$, alors :

$$\boxed{P(A_{x_1+h_1,x_2+h_2,\ldots,x_d+h_d}) = \sum_{m=1}^{r} \frac{1}{m!}.\begin{pmatrix} P^{(m)}(x_1).A_{h_1}^m & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & P^{(m)}(x_2).A_{h_2}^m & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & P^{(m)}(x_{d-1}).A_{h_{d-1}}^m & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & P^{(m)}(x_d).A_{h_d}^m \end{pmatrix}}.$$

La preuve est triviale en appliquant la proposition précédente à chaque $A_{x_j}$.

- *Cas particulier* :

$$\boxed{P(A_{x_1,x_2,\ldots,x_d}+h.I) = \sum_{m=1}^{r} \begin{pmatrix} P^{(m)}(x_1).I_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & P^{(m)}(x_2).I_2 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & P^{(m)}(x_{d-1}).I_{d-1} & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & P^{(m)}(x_d).I_d \end{pmatrix}.\frac{A_{h,h,\ldots,h}^m}{m!}}.$$

Où $I_j$ désigne la matrice identique de même ordre que $A_{x_j}$. On peut aussi l'écrire, en appelant $T = A_{0,0,\ldots,0}$, et

$$D = \begin{pmatrix} x_1.I_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x_2.I_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & x_{d-1}.I_{d-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & x_d.I_d \end{pmatrix} = A_{x_1,x_2,\dots,x_d} - T : \boxed{P(D + T + h.I) = \sum_{m=1}^{r} \frac{P^{(m)}(D)}{m!}.(T + h.I)^m}.$$

Ça revient aussi à écrire : $P(D + A_x) = \sum_{m=1}^{r} \frac{P^{(m)}(D)}{m!}.A_x^m$, ce qui généralise la formule de la proposition 4.

- *Proposition 6 (finale)* : Si $P$ est un polynôme de degré $r$, et $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, alors il existe une matrice nilpotente $N$ telle que $M - N$ est diagonalisable, et : $\boxed{P(M) = \sum_{m=1}^{r} \frac{P^{(m)}(M - N)}{m!}.(N + h.I)^m}$.

- *Preuve* : Il existe une matrice inversible $Q$ telle que $M = QAQ^{-1}$, où $A$ est de la forme de la proposition précédente, qu'on peut donc appliquer, en conservant les notations de $D$ et $T$ : $P(A + h.I) = \sum_{m=1}^{r} \frac{P^{(m)}(D)}{m!}.(T + h.I)^m$. La fin est simple à établir, avec $N = QTQ^{-1}$ et $M - N = QDQ^{-1}$.

---

[i] On note $c_1, c_2, \dots, c_n$ les vecteurs colonnes de $M$ et $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ les vecteurs de la base canonique. Le déterminant s'écrit alors : $\det(c_1 - \lambda.e_1, c_2 - \lambda.e_2, \dots, c_n - \lambda.e_n)$ ; il ne reste plus qu'à appliquer la multilinéarité.

[ii] *Théorème de Cayley-Hamilton*[(*)] : Si $P$ est le polynôme caractéristique de $M$, alors $P(M) = \Theta$ (même si $M$ n'est pas diagonalisable).

- *Corollaire* : Il en résulte que, $n$ étant l'ordre de $M$, la famille $(I, M, M^2, \dots, M^n)$ est liée dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

- *Preuve* : Soit $P(\lambda) = \det(M - \lambda.I)$ le polynôme caractéristique de $M$. Les coefficients de la comatrice de $(M - \lambda.I)$ sont des polynômes de la variable $\lambda$ de degré au plus $n - 1$ car les mineurs sont d'ordre $n - 1$ et comportent au mieux une diagonale ayant $n - 1$ fois le terme $\lambda$. Il s'en suit qu'il existe des matrices $N_0, N_1, \dots, N_{n-1}$ telles que ${}^t\mathrm{Co}(M - \lambda.I) = N_0 + \lambda.N_1 + \dots + \lambda^{n-1}.N_{n-1}$. Alors, en notant $P(\lambda) = a_0 + \dots + a_n.\lambda^n$, on a :

$$(M - \lambda.I).{}^t\mathrm{Co}(M - \lambda.I) = P(\lambda).I \Leftrightarrow (M - \lambda.I).(N_0 + \lambda.N_1 + \dots + \lambda^{n-1}.N_{n-1}) = (a_0 + \dots + a_n.\lambda^n).I \Leftrightarrow$$
$$M.N_0 = a_0.I,\ M.N_1 - N_0 = a_1.I,\ \dots,\ M.N_{n-1} - N_{n-2} = a_{n-1}.I,\ -N_{n-1} = a_n.I \text{ (en appariant par degré de } \lambda).$$

Donc : $P(M) = a_0.I + a_1.M + a_2.M^2 + \dots + a_{n-1}.M^{n-1} + a_n.M^n = M.N_0 + M.(M.N_1 - N_0) + M^2(M.N_2 - N_1) + \dots + M^{n-1}(M.N_{n-1} - N_{n-2}) - M^n.N_{n-1} = P(M) = 0$ car les termes s'annulent de proche en proche.

[(*)] : Arthur Cayley : 1821-1895. William Rowan Hamilton : 1805-1865.

[iii] Le coefficient $a_{ij}$ de $T$ ligne $i$ colonne $j$ passe ligne $n+1-i$ colonne $j$ dans $J_nT$ (ou ligne $i$ colonne $n+1-j$ dans $TJ_n$) et passe ensuite ligne $n+1-i$ colonne $n+1-j$ dans $J_nTJ_n$. Il y a plus simple en considérant que c'est la matrice d'un endomorphisme dans $(e_1, \dots, e_n)$ et qu'on écrit directement sa matrice dans $(e_n, \dots, e_1)$ (ce qui au bout du compte est la même démarche).

[iv] Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et $f$ l'endomorphisme de matrice $M$ dans la base canonique $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ de $E = \mathbb{K}^n$.

On pose comme hypothèse de récurrence : $f^k(e_k) = 0_E$ pour $1 \le k \le n$ ; c'est vrai pour $k = 1$ et on suppose que c'est vrai jusqu'à un certain rang $k < n$ quelconque. Il est clair que $f(e_{k+1}) = a_{1,k+1}.e_1 + a_{2,k+1}.e_2 + \dots + a_{k,k+1}.e_k$ ; il s'en suit que $f^k(f(e_{k+1})) = 0_E$, ce qui prouve la récurrence. Il s'en suit que $f^n = 0$ (application nulle) donc $M^n = 0$ (matrice nulle). (*Remarque* : à chaque puissance supplémentaire on introduit une diagonale de 0).

[v] Soit $P$ inversible et $T$ triangulaire supérieure telles que $M = PTP^{-1}$ ; si $k$ est l'ordre de nilpotence de $M$, alors $T^k = \Theta$, ce dont on déduit que sa diagonale est nulle. Les coefficients de la diagonale de $T$ étant égaux aux puissances $k$-ièmes de ceux de la diagonale de $T$, on en déduit que la diagonale de $T$ est nulle, ce qui fait que $T$ est triangulaire stricte.

Il en résulte que le polynôme caractéristique est égal à $(-\lambda)^n$, il est scindé et $M$ est donc trigonalisable, même dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

[vi] *Remarque* : Si $D$ et $T'$ ne commutent pas, il est alors interdit d'utiliser la formule du binôme, le calcul devient donc compliqué ; par exemple, si $T'^2 = 0$, alors : $(D + T')^3 = D^3 + D^2T' + DT'D + T'D^2 + T'DT'$.

- *Exemple* : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^3 = (D + T')^3 = D^3 + D.(DT' + T'D + T'^2) + T'D.(D + T') + T'^2.D + T'^3 =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.\left(\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} 0 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 6 & 18 \\ 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 8 & 39 \\ 0 & 0 & 27 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 18 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 14 & 75 \\ 0 & 8 & 57 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix}.$$

[vii] *Proposition* : Une matrice $M$ est nilpotente si et seulement si $\det(M - \lambda.I) = (-\lambda)^n$.

[viii] Il existe une autre méthode utilisant le fait qu'une récurrence linéaire double sans conditions initiales admet comme ensemble de solutions un sous-espace vectoriel de dimension 2. On cherche alors des solutions de la forme $r^n$. On est conduit à résoudre une équation du second

degré d'inconnue $r$ (identique au polynôme caractéristique) ; s'il y a deux racines distinctes $r_1$ et $r_2$ la solution générale est de la forme : $\alpha.r_1^n + \beta.r_2^n$ où $\alpha$ et $\beta$ sont des scalaires. Si $r$ est racine double, la solution générale est de la forme : $(\alpha n + \beta).r^n$.