

## H) Fiche : Réduction des endomorphismes.

$E$  est un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel, avec  $\mathbf{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , de dimension  $n$  muni de la base canonique  $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ .

Si  $f$  est donné initialement, c'est un endomorphisme de  $E$  de matrice  $M$  dans  $B$ .

Si  $M$  est donnée initialement,  $f$  est l'endomorphisme de  $E = \mathbf{K}^n$  dont la matrice est  $M$  dans la base canonique.

1) Définitions. Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres (éléments propres, spectre).

Le scalaire  $\lambda$  est une valeur propre de  $f$  si et seulement s'il existe un vecteur non nul  $u$  tel que :  **$f(u) = \lambda \cdot u$** .

Le vecteur  $u$  est un vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda$  de  $f$  si et seulement si :  $f(u) = \lambda \cdot u$ . (On exclut le cas  $u = 0_E$ , bien qu'il appartienne quand même aux sous-espaces propres).

L'ensemble des valeurs propres de  $f$  est appelé le spectre de  $f$  (qu'on peut noter  $\text{Spec}(f)$ ).

- *Proposition* : Si  $u$  est un vecteur propre de  $f$  il en va de même de tout vecteur colinéaire à  $u$ , sauf  $0_E$ . Deux vecteurs propres de  $f$  associés à des valeurs propres distinctes ne sont pas colinéaires ; plus généralement, une famille de vecteurs propres tous associés à des valeurs propres distinctes est libre.

2) Endomorphismes et matrices diagonalisables. Polynôme caractéristique.

Une matrice  $M$  est diagonalisable quand elle est semblable à une matrice diagonale : Il existe une matrice inversible  $P$  et une matrice diagonale  $D$  telles que :  **$M = PDP^{-1}$** .

Un endomorphisme est diagonalisable quand il existe une base de vecteurs propres. En pratique on cherche cette base en diagonalisant sa matrice dans la base canonique ;  $P$  est alors la matrice de passage dont les colonnes sont les coordonnées de la nouvelle base données dans l'ancienne base.

Le polynôme caractéristique de  $f$  est :  $\det(f - \lambda \cdot \text{id}_E)$ . C'est un polynôme de degré  $n$  (la dimension de  $E$ ).

Le polynôme caractéristique de  $M$  est :  **$\det(M - \lambda \cdot I_n)$** . C'est un polynôme de degré  $n$ .

Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique. Il s'en suit que si  $M$  est la matrice de  $f$  dans une base quelconque alors :  $\det(f - \lambda \cdot \text{id}_E) = \det(M - \lambda \cdot I_n)$ .

Les racines du polynôme caractéristique sont les valeurs propres, leur ordre de multiplicité est supérieur ou égal à la dimension du sous-espace propre correspondant.

- *Proposition* : Un endomorphisme (ou une matrice) est diagonalisable si et seulement son polynôme caractéristique est scindé et si l'ordre de toute valeur propre est égal à la dimension du sous-espace propre associé.

3) Cas particulier des homothéties, projecteurs, symétries, etc.

Une homothétie est déjà diagonale.

Étant donné un projecteur  $p$  et une symétrie  $s$  tels que  $s = 2p - \text{id}_E$ , alors  $\text{Im}(p)$  est le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 à la fois pour  $p$  et  $s$ , tandis que  $\text{Ker}(p)$  est le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 pour  $p$ , et -1 pour  $s$ . (On diagonalise donc dans une base dont une partie est dans  $\text{Ker}(p)$  et l'autre dans  $\text{Im}(p)$ , qui sont supplémentaires).

- *Propositions* : (1) Un endomorphisme admettant  $n$  valeurs propres distinctes est diagonalisable.

(2) Une matrice symétrique réelle est diagonalisable. Si  $E$  est euclidien elle est diagonalisable dans une base orthonormale de vecteurs propres. (*Remarque* : Ce n'est pas forcément le cas d'une matrice complexe ; par exemple  $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$  n'est pas diagonalisable).

4) Application au calcul des puissances d'une matrice.

Si  $M$  est diagonalisable, il est aisé de calculer les puissances de  $M$  :  $\mathbf{M}^k = \mathbf{P}\mathbf{D}^k\mathbf{P}^{-1}$ .

5) Matrices triangulaires.

*Proposition* : Une matrice triangulaire inférieure est semblable à une matrice triangulaire supérieure (et réciproquement).

Une matrice triangulaire stricte est nilpotente.

- *Cas particulier des dimensions 2 et 3* : (pour  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ )

$\begin{pmatrix} \lambda_1 & x \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} \lambda_1 & x & b \\ 0 & \lambda_1 & c \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$  ou  $\begin{pmatrix} \lambda_1 & a & b \\ 0 & \lambda_2 & x \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$  sont diagonalisables si et seulement si :  $x = 0$ .

$\begin{pmatrix} \lambda_1 & a & b \\ 0 & \lambda_2 & c \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$  est diagonalisable si et seulement si le déterminant suivant est nul :  $\begin{vmatrix} a & b \\ \lambda_2 - \lambda_1 & c \end{vmatrix} = 0$ .

6) Théorème : Si le polynôme caractéristique est scindé, l'endomorphisme (ou la matrice) est trigonalisable (semblable à une matrice triangulaire supérieure).

*Conséquence* : Si  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  tous les endomorphismes sont trigonalisables (car tous les polynômes de degré  $n$  y admettent  $n$  racines).

7) Trigonalisation d'un endomorphisme (ou d'une matrice) admettant  $\dim(E) - 1$  valeurs propres distinctes.

•  $M$  est trigonalisable s'il existe une matrice triangulaire  $T$  et une matrice inversible  $P$  pour lesquelles  $\mathbf{M} = \mathbf{P}\mathbf{T}\mathbf{P}^{-1}$ .

Soit  $F$  la somme (directe) des sous-espaces propres, c'est soit  $E$  (auquel cas elle est diagonalisable), soit un hyperplan, auquel cas, en complétant une base quelconque de  $F$  (par exemple avec un élément de la base canonique (placé à la fin)), on obtient une base dans laquelle la matrice de  $f$  est triangulaire supérieure. **La dernière valeur diagonale est alors égale à la valeur propre double.**

8) Application au calcul des puissances de matrices trigonalisables.

Si  $M$  est trigonalisable, alors :  $\mathbf{M}^k = \mathbf{P}\mathbf{T}^k\mathbf{P}^{-1}$ .

- *Cas particulier* : Si  $T$  est une matrice triangulaire stricte, il est aisé de calculer les puissances de  $(T + \lambda \cdot I)$  car on peut appliquer la formule du binôme de Newton :

$$(\mathbf{T} + \lambda \cdot \mathbf{I})^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \lambda^{k-i} \cdot \mathbf{T}^i.$$

En notant que toutes les puissances de  $T$  sont nulles au-dessus de son ordre de nilpotence.

9) Application aux suites.

Si  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont définies par :  $\{u_{n+1} = au_n + bv_n, v_{n+1} = cu_n + dv_n\}$  alors :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} \text{ avec } M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \text{ Et ainsi : } \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \mathbf{P}\mathbf{D}^n\mathbf{P}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}.$$

*Application<sup>1</sup>* : Si  $(u_n)$  est définie par une récurrence linéaire d'ordre 2 pour tout entier (naturel)  $n$  :

$$(u_0, u_1) \text{ donnés et } u_{n+2} = a \cdot u_{n+1} + b \cdot u_n.$$

On peut procéder de la même façon en posant :  $\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}.$

*Remarques* : Dans le cas d'une récurrence du type  $u_{n+2} = a \cdot u_{n+1} + b \cdot u_n + c$ ,  $u_n$  est somme de la solution de  $v_{n+2} = a \cdot v_{n+1} + b \cdot v_n$  et d'une solution particulière de l'équation initiale, par exemple une suite constante  $k$  (ou  $kn$  ou  $kn^2$  dans certains cas). Il est en outre possible de généraliser ces résultats à des dimensions supérieures à 2.

Matrice trigonalisable :  $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \mathbf{P}\mathbf{T}^n\mathbf{P}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}.$

- On peut généraliser ces résultats à des dimensions supérieures.

10) Application aux systèmes différentiels.

Si  $x$  et  $y$  sont des fonctions dérivables de la variable  $t$  définies par les deux équations différentielles :  $\{x' = ax + by, y' = cx + dy\}$  alors :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ avec } M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Si  $M = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1}$  alors pour  $u$  et  $v$  telles que  $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ , on a  $\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 u \\ \lambda_2 v \end{pmatrix}.$

<sup>1</sup> Il existe une autre méthode utilisant le fait qu'une récurrence linéaire double sans conditions initiales admet comme ensemble de solutions un sous-espace vectoriel de dimension 2. On cherche alors des solutions de la forme  $r^n$ . On est conduit à résoudre une équation du second degré d'inconnue  $r$  (identique au polynôme caractéristique) ; s'il y a deux racines distinctes  $r_1$  et  $r_2$  la solution générale est de la forme :  $\alpha \cdot r_1^n + \beta \cdot r_2^n$  où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des scalaires. Si  $r$  est racine double, la solution générale est de la forme :  $(\alpha n + \beta) \cdot r^n$ .

Il s'en suit que :  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} k_1 \cdot e^{\lambda_1 t} \\ k_2 \cdot e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$  où  $k_1$  et  $k_2$  sont des constantes.

*Remarque* : Il faut modifier la forme des solutions obtenues quand  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont des complexes (conjugués) et qu'on souhaite obtenir des fonctions réelles (qui seront dans ce cas des sinus ou cosinus obtenus avec les formules d'Euler).

*Exemple* : Le système  $\{x' = -y, y' = x\}$  admet les valeurs propres  $i$  et  $-i$ , et on obtient alors  $\{u = k_1 e^{it}, v = k_2 e^{-it}\}$  pour  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$ ; d'où :

$$\{x = k_1 e^{it} + k_2 e^{-it}, y = -ik_1 e^{it} + ik_2 e^{-it}\}.$$

En posant  $k_1 = (\alpha + i\beta)/2$  et  $k_2 = (\alpha - i\beta)/2$ , on obtient :

$$\{x = \alpha \cdot \cos(t) - \beta \cdot \sin(t), y = \beta \cdot \cos(t) + \alpha \cdot \sin(t), (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Matrice non diagonalisable (dans  $\mathbb{C}$ ) : Nécessairement il y a une racine double  $\lambda$  qui permet de trouver  $v$ , et il faut ensuite résoudre l'équation portant sur  $u$  en deux fois (sans second membre puis avec) ; la solution générale est :  $v = k_1 \cdot e^{\lambda t}$ ,  $u = (ak_1 t + k_2) \cdot e^{\lambda t}$  où  $k_1$  et  $k_2$  sont des scalaires,  $a$  est le coefficient non nul et non diagonal de la matrice triangulaire.

- On peut généraliser ces résultats à des dimensions supérieures.

#### 11) Cas particulier des espaces euclidiens.

Si  $E$  est euclidien et que  $f$  conserve le produit scalaire, deux vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux (il n'y a que deux valeurs propres possibles :  $-1$  et  $1$ ).

Il s'en suit que si  $f$  est diagonalisable, il existe une base orthonormale de vecteurs propres.

#### 12) Proposition.

Une matrice de rang 1 est diagonalisable si et seulement si sa trace n'est pas nulle.