I1) TD : Transformations (première partie).

I1.1) Soit le plan P donné par son équation cartésienne $P:(2x + y + 2z = 0)$ et $D = P^{\perp}$. Donner les matrices des projections orthogonales sur P et D, puis des symétries orthogonales par rapport à P et D.

- *Corrigé* : Pour tout vecteur u de $E = \mathbb{R}^3$, on a : $u = p_P(u) + p_D(u)$, et si v est un vecteur directeur de D, donc un vecteur normal (orthogonal[1]) à P, alors : $p_D(u) = \frac{(u|v)}{||v||^2}.v$. Ainsi, pour $v:\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$, et $u:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$:

$p_D(u) = \frac{1}{9}.(2x + y + 2z).\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ = , et donc, la matrice de p_D dans la base canonique est : $M(p_D) = \frac{1}{9}.\begin{pmatrix}4&2&4\\2&1&2\\4&2&4\end{pmatrix}$.

Ensuite, comme $p_P(u) = u - p_D(u) = (id_E - p_D)(u)$, alors : $M(p_P) = I - M(p_D) = \frac{1}{9}.\begin{pmatrix}5&-2&-4\\-2&8&-2\\-4&-2&5\end{pmatrix}$.

Comme $s_D = 2.p_D - id_E$ et $s_P = 2.p_P - id_E = 2(id_E - p_D) - id_E = id_E - 2.p_D = -s_D$, alors :

$M(s_D) = 2.M(p_D) - I = \frac{1}{9}.\begin{pmatrix}-1&4&8\\4&-7&4\\8&4&-1\end{pmatrix}$, et : $M(s_P) = -M(s_D) = \frac{1}{9}.\begin{pmatrix}1&-4&-8\\-4&7&-4\\-8&-4&1\end{pmatrix}$.

I1.2) Soit f un endomorphisme de l'espace euclidien E de dimension n admettant dans la base orthonormale $B = (e_1, e_2, ..., e_n)$ la matrice orthogonale $M = (a_{ij})$. Exprimer $(f(e_1 + e_2 + ... + e_n)|e_1 + e_2 + ... + e_n)$ en fonction des a_{ij}. En déduire l'inégalité : $|\sum_{i,j} a_{ij}| \leq n$.

- *Corrigé* : La k-ième composante de $f(e_1 + e_2 + ... + e_n)$ est égale, dans B, à la somme des coefficients de la k-ième ligne de matrice M (en vertu du produit de matrice « *ligne par colonne* ») ; autre argument :

$f(e_1 + e_2 + ... + e_n) = f(e_1) + f(e_2) + ... + f(e_n)$, qui vaut la somme des colonnes de la matrice M. Donc :

$f(e_1 + e_2 + ... + e_n) = \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n} a_{ij}).e_i$.

En outre, étant donné un vecteur u quelconque, $(u|e_1 + e_2 + ... + e_n) = (u|e_1) + (u|e_2) + ... + (u|e_n)$ est la somme des composantes de u, donc :

$(f(e_1 + e_2 + ... + e_n)|e_1 + e_2 + ... + e_n) = \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n} a_{ij})$.

On applique ensuite l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $|(u|v)| \leq ||u||.||v||$, donc :

$|(f(e_1 + e_2 + ... + e_n)|e_1 + e_2 + ... + e_n)| = |\sum_{i,j} a_{ij}| \leq ||f(e_1 + e_2 + ... + e_n)||.||e_1 + e_2 + ... + e_n|| = ||f(e_1 + e_2 + ... + e_n)||.\sqrt{n}$.

Mais, comme M est une matrice orthogonale, alors f est un endomorphisme orthogonal et vérifie :

$||f(e_1 + e_2 + ... + e_n)|| = ||e_1 + e_2 + ... + e_n|| = \sqrt{n}$.

Finalement : $|\sum_{i,j} a_{ij}| \leq \sqrt{n}.\sqrt{n} = n$.

I1.3) Dans un espace euclidien de dimension 3 muni d'une base orthonormale directe canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$, donner la matrice de la rotation d'axe dirigé et orienté par $e_1 + e_2 - e_3$ et d'angle $\pi/3$.

- *Corrigé* : Rappel des formules du cours :

$R_{D,\theta}(v) = (v|u_1).u_1 + (u_2\ \ u_3)\begin{pmatrix}\cos(\theta)&-\sin(\theta)\\\sin(\theta)&\cos(\theta)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(v|u_2)\\(v|u_3)\end{pmatrix}$; $R_{D,\theta}(v) = (1 - \cos(\theta))(v|u).u + \cos(\theta).v + \sin(\theta).(u\wedge v)$.

En ce qui concerne la première formule, on définit une base orthonormale bâtie autour de la rotation, notée ici r :

[1] La vraie terminologie est : vecteur normal au plan, ce qui signifie qu'il est orthogonal à tout vecteur du plan, mais on tolère la dénomination : vecteur orthogonal au plan.

$u_1 : \frac{1}{\sqrt{3}}.\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$, $u_2 : \frac{1}{\sqrt{2}}.\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$, $u_3 = u_1 \wedge u_2$, $u_3 : \frac{1}{\sqrt{6}}.\begin{pmatrix}-1\\-1\\-2\end{pmatrix}$. Puis, étant donné un vecteur quelconque $u : \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$:

$r(u) = (u|u_1).u_1 + (u|u_2).(\cos(\frac{\pi}{3}).u_2 + \sin(\frac{\pi}{3}).u_3) + (u|u_3).(-\sin(\frac{\pi}{3}).u_2 + \cos(\frac{\pi}{3}).u_3) =$

$r(u) = \frac{1}{3}.(x + y - z).\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y)(\frac{1}{2\sqrt{2}}.\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{\sqrt{6}}.\begin{pmatrix}-1\\-1\\-2\end{pmatrix}) + \frac{1}{\sqrt{6}}(-x - y - 2z)(\frac{-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{2\sqrt{6}}.\begin{pmatrix}-1\\-1\\-2\end{pmatrix}) = ...$

$r(u) = \frac{1}{3}.\begin{pmatrix}2x + 2y + z\\-x + 2y - 2z\\-2x + y + 2z\end{pmatrix}$, d'où : $M(r) = \frac{1}{3}.\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\-1 & 2 & -2\\-2 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

- *Avec la seconde formule* : $r(u) = \frac{1}{6}.(x + y - z).\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}.\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} + \frac{1}{2}.(\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}) = ... = \frac{1}{3}.\begin{pmatrix}2x + 2y + z\\-x + 2y - 2z\\-2x + y + 2z\end{pmatrix}$, d'où :

$M(r) = \frac{1}{3}.\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\-1 & 2 & -2\\-2 & 1 & 2\end{pmatrix}$. (*Ça paraît plus rapide, mais la formule est plus difficile à retenir*).

I1.4) Dans un espace euclidien de dimension 3 muni d'une base orthonormale directe canonique, déterminer la nature des endomorphismes suivants, donnés par leur matrice dans la base canonique :

$$\frac{1}{3}.\begin{pmatrix}2 & 2 & -1\\-1 & 2 & 2\\2 & -1 & 2\end{pmatrix} ; \frac{1}{9}.\begin{pmatrix}-7 & -4 & 4\\4 & -8 & -1\\-4 & -1 & -8\end{pmatrix} ; \frac{1}{7}.\begin{pmatrix}2 & 6 & -3\\-6 & 3 & 2\\3 & 2 & 6\end{pmatrix}.$$

- *Corrigé* : • On vérifie d'abord que c'est bien la matrice d'un endomorphisme orthogonal (matrice orthogonale : ${}^tMM = I$) :

$\frac{1}{9}.\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\2 & 2 & -1\\-1 & 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 2 & -1\\-1 & 2 & 2\\2 & -1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

En outre : $\det(M) = ... = 1$, c'est donc une isométrie positive.

On cherche ensuite l'ensemble invariant de l'endomorphisme f de matrice M dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, $B = (e_1, e_2, e_3)$:

$f(u) = u \Leftrightarrow M.\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \Leftrightarrow \{-x + 2y - z = 0, -x - y + 2z = 0, 2x - y - z = 0\}$; la somme des trois équations est nulle, on les soustrait deux à deux : $Inv(f):(x = y = z) = Vect(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix})$. C'est donc une rotation d'axe $Inv(f)$; l'angle est donné par son cosinus : $tr(M) = 2.\cos(\theta) + 1 \Leftrightarrow \cos(\theta) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta = \pm\frac{\pi}{3}$.

Si on oriente l'axe par $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, alors le signe du sinus est donné par : $(e_1 \wedge r(e_1)|e_1 + e_2 + e_3) = \frac{1}{3}.(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix} | \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}) =$
$\frac{1}{3}.(\begin{pmatrix}0\\-2\\-1\end{pmatrix} | \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}) = -1$, donc : $\theta = -\frac{\pi}{3}$.

- *Autre calcul possible pour le sinus* : $\sin(\theta) = (\frac{1}{\sqrt{2}}.\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \wedge r(\frac{1}{\sqrt{2}}.\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}) | \frac{1}{\sqrt{3}}.\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}) = \det(\frac{1}{\sqrt{3}}.\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}.\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, r(\frac{1}{\sqrt{2}}.\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix})) =$
$\frac{1}{2\sqrt{3}}.(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \wedge r(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}) | \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}) = \frac{1}{2\sqrt{3}}.(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} | \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}) = \frac{1}{2\sqrt{3}}.(\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix} | \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. D'où : $\theta = -\frac{\pi}{3}$.

• On vérifie d'abord que c'est bien la matrice d'un endomorphisme orthogonal

$\frac{1}{81}.\begin{pmatrix}-7 & 4 & -4\\-4 & -8 & -1\\4 & -1 & -8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-7 & -4 & 4\\4 & -8 & -1\\-4 & -1 & -8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

En outre : $\det(M) = ... = -1$, c'est donc une isométrie négative.

On cherche ensuite l'ensemble invariant $Inv(f)$:

$\frac{1}{9}.\begin{pmatrix}-7 & -4 & 4\\4 & -8 & -1\\-4 & -1 & -8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow x = y = z = 0$; donc : f est une antirotation.

Il faut chercher E_{-1} : $\frac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix}-7 & -4 & 4\\ 4 & -8 & -1\\ -4 & -1 & -8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \{x = 0,\ y = z\} \rightarrow u_1 : \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

On choisit ensuite un vecteur orthogonal à u_1 : $u_2 : \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

On a ainsi : $\cos(\theta) = \frac{1}{2}(\mathrm{tr}(M) + 1) = \frac{-7}{9}$, et en orientant selon u_1 : $\sin(\theta) = \det(u_1, u_2, f(u_2)) = \frac{4\sqrt{2}}{9}$. Il en résulte que $\theta = \mathrm{Arccos}(\frac{-7}{9})$; f est la composée commutative de la rotation d'axe $\mathrm{Vect}(u_1)$ et d'angle θ, et de la réflexion de plan $u_1^{\perp} : (y + z = 0)$.

- On vérifie d'abord que c'est bien la matrice d'un endomorphisme orthogonal

$$\frac{1}{49}\cdot\begin{pmatrix}2 & -6 & 3\\ 6 & 3 & 2\\ -3 & 2 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 6 & -3\\ -6 & 3 & 2\\ 3 & 2 & 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

En outre : $\det(M) = \ldots = 1$, c'est donc une isométrie positive.

On cherche ensuite l'ensemble invariant $\mathrm{Inv}(f)$:

$\frac{1}{7}\cdot\begin{pmatrix}2 & 6 & -3\\ -6 & 3 & 2\\ 3 & 2 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \{x = 0,\ z = 2y\}$, donc : $\mathrm{Inv}(f) = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix})$.

C'est une rotation d'axe $\mathrm{Inv}(f)$; l'angle est donné par son cosinus : $2.\cos(\theta) + 1 = \frac{11}{7} \Rightarrow \cos(\theta) = \frac{2}{7}$.

Si on oriente l'axe par $\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$, alors le signe du sinus est : $\frac{1}{7}\cdot(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}2\\-6\\3\end{pmatrix}|\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}) = \frac{1}{7}\cdot(\begin{pmatrix}0\\-3\\-6\end{pmatrix}|\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}) = \frac{-15}{7}$, donc : $\sin(\theta) = \frac{-3\sqrt{5}}{7}$.

($\theta = -\mathrm{Arccos}(\frac{2}{7})$).

I1.5) Pour $\dim(E) = 3$, soit a un vecteur unitaire, θ un angle et $R_{a,\theta}$ la rotation d'axe $\mathrm{Vect}(a)$ orienté par a et d'angle θ. Montrer que pour tout vecteur u : $R_{a,\theta}(u) = \cos(\theta).u + \sin(\theta).(a\wedge u) + 2(a|u).\sin^2(\theta/2).a$.

- *Corrigé* : Si $u \in \mathrm{Vect}(a)$, $u = \lambda.a$, alors $R(u) = u$, et :

$\cos(\theta).u + \sin(\theta).(a\wedge u) + 2(a|u).\sin^2(\theta/2).a = \cos(\theta).\lambda.a + 2\lambda.\sin^2(\theta/2).a = (\cos(\theta) + 2.\sin^2(\theta/2))\lambda.a = \lambda.a = u$.

Si $u \notin \mathrm{Vect}(a)$, soit : $v = u - (a|u).a$ la projection orthogonale de u sur $a^{\perp}$, et : $w = a\wedge v$, de même norme que v ; alors (a, v, w) est une famille orthogonale directe, et : $R(u) = (a|u).a + \cos(\theta).v + \sin(\theta).w$. C'est-à-dire : $R(u) = (a|u).a + \cos(\theta).(u - (a|u).a) + \sin(\theta).(a\wedge(u - (a|u).a)) = (1 - \cos(\theta))(a|u).a + \cos(\theta).u + \sin(\theta).(a\wedge u) =$ $R(u) = \cos(\theta).u + \sin(\theta).(a\wedge u) + 2(a|u).\sin^2(\theta/2).a$.

I1.6) Dans un espace euclidien de dimension 3 muni d'une base orthonormale directe canonique, soit f de matrice $\frac{1}{15}\cdot\begin{pmatrix}8 & 6 & -10\\ -10 & 5 & 0\\ 6 & -8 & 5\end{pmatrix}$. Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont orthogonaux et que f est la composée d'une rotation et d'une projection orthogonale que l'on déterminera.

- *Corrigé* : $\mathrm{Ker}(f)$ est donné par : $\frac{1}{15}\cdot\begin{pmatrix}8 & 6 & -10\\ -10 & 5 & 0\\ 6 & -8 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \{y = z = 2x\}$. Donc : $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix})$.

Selon le théorème du rang, $\mathrm{Im}(f)$ est un plan dont les colonnes de M sont une famille génératrice. Autrement dit, si $\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ est orthogonal à ces trois colonnes alors il est orthogonal à $\mathrm{Im}(f)$:

$(\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}|\begin{pmatrix}8\\-10\\6\end{pmatrix}) = (\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}|\begin{pmatrix}6\\5\\-8\end{pmatrix}) = (\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}|\begin{pmatrix}-10\\0\\5\end{pmatrix}) = 0$, ce qui prouve bien : $\mathrm{Im}(f)\perp\mathrm{Ker}(f)$.

- *Remarque* : $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix})$.

Le projecteur est donc simple à déterminer, il s'agit de la projection orthogonale p sur $\mathrm{Im}(f)$. Étant donné un vecteur quelconque $u:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, alors : $p(u) = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} - \frac{1}{9}(\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}|\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}).\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} = \dots = \frac{1}{9}.\begin{pmatrix}8x - 2y - 2z\\-2x + 5y - 4z\\-2x - 4y + 5z\end{pmatrix}$.

La matrice du projecteur est donc : $P = \frac{1}{9}.\begin{pmatrix}8 & -2 & -2\\-2 & 5 & 4\\-2 & -4 & 5\end{pmatrix}$.

Par conséquent, la matrice de la rotation, si c'en est bien une, vérifie : $M = PR = RP$, car la composée est commutative si l'axe de la rotation est choisi orthogonal au plan de la projection. Malheureusement, la matrice d'un projecteur n'est pas inversible.

On utilise le fait que le plan est invariant par le projecteur ; ainsi, quel que soit le vecteur u orthogonal à $\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$, alors : $f(u) = r(p(u)) = r(u)$.

L'équation du plan orthogonal à $\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ est : $(x + 2y + 2z = 0)$, donc : $u:\begin{pmatrix}-2y - 2z\\y\\z\end{pmatrix}$.

Ainsi : $r(u) = \frac{1}{15}.\begin{pmatrix}8 & 6 & -10\\-10 & 5 & 0\\6 & -8 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2y - 2z\\y\\z\end{pmatrix} = \frac{1}{15}.\begin{pmatrix}-10y - 26z\\25y + 20z\\-20y - 7z\end{pmatrix}$, et alors : $\theta = (\widehat{u, r(u)})$; $\cos(\theta) = \frac{(u|r(u))}{\|u\|^2} = \dots =$

$\cos(\theta) = \frac{\frac{3}{5}.(5y^2 + 8yz + 5z^2)}{5y^2 + 8yz + 5z^2} = \frac{3}{5}$ (il aurait été plus simple de donner des valeurs à y et z).

En outre : $u\wedge r(u) = \frac{-4}{15}(4y^2 + 8yz + 5z^2).\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} = \frac{-4.\|u\|^2}{15}.\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$; ainsi, si on oriente l'axe de la rotation par $\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$, alors : $\sin(\theta) = \frac{-4}{5}$.

Il ne reste plus qu'à calculer les images des vecteurs de la base canonique, par exemple avec la seconde formule de l'exercice I1.3 ; en notant $w = \frac{1}{3}.\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$.

$r(u) = (1 - \cos(\theta))(u|w).w + \cos(\theta).u + \sin(\theta)(w\wedge u) = \frac{2}{45}.(x + 2y + 2z).\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} + \frac{3}{5}.\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} - \frac{4}{15}.(\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}) =$

$\frac{2}{45}.(x + 2y + 2z).\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} + \frac{27}{45}.\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} - \frac{12}{45}.\begin{pmatrix}-2y + 2z\\2x - z\\-2x + y\end{pmatrix} = \frac{1}{45}.\begin{pmatrix}29x + 28y - 20z\\-20x + 35y + 20z\\28x - 4y + 35z\end{pmatrix}$, d'où : $R = \frac{1}{45}.\begin{pmatrix}29 & 28 & -20\\-20 & 35 & 20\\28 & -4 & 35\end{pmatrix}$.