I2) TD : Transformations (deuxième partie**).**

I2.1) Pour $\dim(E) = 3$, étant donné un vecteur non nul a, soit f défini par $f(u) = a\wedge(a\wedge u)$; montrer que c'est un endomorphisme symétrique et que c'est la composée d'un projecteur orthogonal et d'une homothétie. (Formule du double produit vectoriel : $x\wedge(y\wedge z) = (x|z).y - (x|y).z$)

- *Corrigé* : On vérifie d'abord que c'est un endomorphisme : $f(u)$ est bien un élément de E, et,en outre, pour tout couple (u,v) de vecteurs et tout couple (α, β) de scalaires : $f(\alpha.u + \beta.v) = ... = \alpha.f(u) + \beta.f(v)$. On vérifie ensuite qu'il est symétrique : $(f(u)|v) = (a\wedge(a\wedge u)|v)$; sachant que : $\det(x, y, z) = (x|y\wedge z) = (x\wedge y|z)$, alors : $(f(u)|v) = -((a\wedge u)\wedge a|v) = -(a\wedge u|a\wedge v) = (u\wedge a|a\wedge v) = (u|a\wedge(a\wedge v)) = (u|f(v))$. Elle est bien symétrique (on peut aussi utiliser la formule du double produit vectoriel : $x\wedge(y\wedge z) = (x|z).y - (x|y).z$).

$f(a) = 0_E$, on cherche donc $\mathrm{Ker}(f)$: $a\wedge(a\wedge u) = 0_E \Leftrightarrow a\wedge u$ colinéaire à a ; mais comme il lui est orthogonal, il y a une unique solution qui est : $a\wedge u = 0_E$, c'est-à-dire : u colinéaire à a. Par suite : $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(a)$.

Si $f(a)$ n'est pas nul, alors il est orthogonal à a ; et, d'après le théorème du rang : $\mathrm{Im}(f) = a^\perp$.

Le projecteur orthogonal p cherché, s'il existe, sera donc la projection orthogonale sur $a^\perp$.

Les vecteurs de $a^\perp$ étant invariant par le projecteur, leur image par f doit être égale à leur image par l'homothétie cherchée, si elle existe.

Ce qui ne signifie rien d'autre que : $a^\perp$ est un sous-espace propre pour une valeur propre égale au rapport de l'homothétie (les sous-espaces propres d'un endomorphisme symétrique sont effectivement orthogonaux deux à deux).

Soit $u\perp a$; alors : $a\wedge u$ est un vecteur directement orthogonal à a et u, et de norme $||a||.||u||$. Donc : $f(u)$ est un vecteur directement orthogonal à a et à $a\wedge u$, ce qui signifie qu'il est colinéaire à u, de sens contraire (car : $(a, u, a\wedge u)$ est direct, $(a, a\wedge u, f(u))$ est direct quand $(a, a\wedge u, u)$ est indirect), et de norme : $||a||^2.||u||$.

Il en résulte que, si u est orthogonal à a, alors $f(u) = -||a||^2.u$. L'homothétie est de rapport $-||a||^2$ (on peut aussi une nouvelle fois utiliser la formule du double produit vectoriel : $a\wedge(a\wedge u) = (a|u).a - ||a||^2.u$).

En outre, en notant h l'homothétie :

$$p\circ h(u) = p(h(u)) = h(u) - \frac{(h(u)|a)}{||a||^2}.a = -||a||^2.u + (u|a).a = a\wedge(a\wedge u) = f(u) = -||a||^2.(u - \frac{(u|a)}{||a||^2}.a) = h(p(u)) = h\circ p(u).$$

Conclusion : $f = h\circ p = p\circ h$.

I2.2) Soit f un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E ; montrer l'équivalence :

$$(\exists\ B = (u_1, u_2, ..., u_n) \text{ base orthonormale de } E \text{ telle que } \forall i\ (1 \le i \le n)\ (f(u_i)|u_i) = 0) \Leftrightarrow \mathrm{Tr}(f) = 0.$$

(Pour l'implication réciproque, construire la base avec un algorithme).

En déduire à quelle condition l'ensemble $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0\}$ est formé de deux droites orthogonales, où a, b et c sont trois réels non simultanément nuls.

- *Corrigé* : Dans toute base orthonormale $B = (u_1, u_2, ..., u_n)$, et pour tout vecteur v de E, on a :

$v = (v|u_1).u_1 + (v|u_2).u_2 + ... + (v|u_n).u_n$.

En particulier : $f(u_i) = (f(u_i)|u_1).u_1 + (f(u_i)|u_2).u_2 + ... + (f(u_i)|u_n).u_n$; la matrice de f dans cette base est donc :

$$M = \begin{pmatrix} (f(u_1)|u_1) & (f(u_2)|u_1) & \cdots & (f(u_n)|u_1) \\ (f(u_1)|u_2) & (f(u_2)|u_2) & \cdots & (f(u_n)|u_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (f(u_1)|u_n) & (f(u_2)|u_n) & \cdots & (f(u_n)|u_n) \end{pmatrix}.$$

Finalement : $\mathrm{Tr}(f) = \mathrm{Tr}(M) = (f(u_1)|u_1) + (f(u_2)|u_2) + ... + (f(u_i)|u_n)$ *(i)*.

Conclusion : Si pour tout i, $(f(u_i)|u_i) = 0)$, alors : $\mathrm{Tr}(f) = 0$. (Cette démonstration n'utilise pas le fait que f est symétrique).

- *Réciproque* : On suppose que $\mathrm{Tr}(f) = 0$.

- *Démonstration n° 1 (n'utilisant pas le fait que f est symétrique)* :

S'il existe un vecteur unitaire u_n tel que $(f(u_n)|u_n) = 0$, alors on a ce qu'on voulait.

S'il n'existe pas un tel vecteur, alors pour tout v de E : $(f(v)|v) > 0$ ou $f(v)|v) < 0$.

Si pour tout v de E : $(f(v)|v) > 0$ (respectivement $(f(v)|v) < 0$), alors, d'après *(i)*, il n'est pas possible qu'il y ait une base orthonormale dans laquelle $Tr(f) = 0$.

Il existe donc v tel que $(f(v)|v) < 0$, et w tel que $(f(w)|w) > 0$. On définit alors la fonction numérique réelle g par : $g(x) = (f((1 - x).v + x.w)|(1 - x).v + x.w)$. Ainsi : $f(0) = (f(v)|v) < 0$, et $f(1) = (f(w)|w) > 0$.

Comme g est continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel x de $]0, 1[$ tel que $g(x) = 0$, c'est-à-dire un vecteur u tel que $(f(u)|u) = 0$, ce qu'on a supposé impossible.

L'existence de u_n étant acquise, soit : $E_{n-1} = u_n^{\perp}$.

Dans E_{n-1}, s'il existe un vecteur unitaire u_{n-1} tel que $(f(u_{n-1})|u_{n-1}) = 0$, alors on a ce qu'on voulait, sinon on reproduit le même procédé. On construit ainsi une famille orthonormale, jusqu'à $E_1 = \{u_2, u_3, ..., u_{n-1}, u_n\}^{\perp}$, qui est de dimension 1. Soit u_1 un vecteur unitaire quelconque de E_1 ; la famille $B = (u_1, u_2, ..., u_n)$ est une base orthonormale, on peut donc appliquer la formule *(i)* : Mais comme tous les $(f(u_i)|u_i)$ sont nuls pour $2 \leq i \leq n$, il ne reste que l'égalité : $Tr(f) = (f(u_1)|u_1) = 0$. On a obtenu ce qu'on voulait.

- *Démonstration n° 2 (utilisant le fait que f est symétrique)* :

Comme f est symétrique, il existe une base orthonormale de vecteurs propres $B_n = (e_1, e_2, ..., e_n)$, pour les valeurs propres respectives $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$; donc : $Tr(f) = \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n$.

Soit $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}.(e_1 + e_2 + ... + e_n)$, alors $||u_n|| = 1$ et $(f(u_n)|u_n) = \frac{1}{n}.(\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n) = 0$.

On pose $E_{n-1} = u_n^{\perp}$, p_{n-1} la projection orthogonale sur E_{n-1}, et $f_{n-1} = p_{n-1} \circ f$.

Alors f_{n-1} est un endomorphisme symétrique sur E_{n-1} car p_{n-1} et f le sont. Soit u et v dans E_{n-1} ; alors : $p_{n-1}(u) = u$ et $p_{n-1}(v) = v$, donc : $(p_{n-1} \circ f(u)|v) = (f(u)|p_{n-1}(v)) = (f(u)|v) = (u|f(v)) = (p_{n-1}(u)|f(v)) = (u|p_{n-1} \circ f(v))$.

Il existe donc une base orthonormale $B_{n-1} = (e_{1,n-1}, e_{2,n-1}, ..., e_{n-1,n-1})$ de vecteurs propres. En outre, la trace de f_{n-1} est nulle car, en notant q_{n-1} la projection orthogonale sur $Vect(u_n)$, alors $p_{n-1} + q_{n-1} = id_E$, donc :

$f_{n-1} + q_{n-1} \circ f = f$, ce qui implique : $Tr(f_{n-1}) + Tr(q_{n-1} \circ f) = 0$, et comme $q_{n-1} \circ f(u_n) = 0$ (car $(f(u_n)|u_n) = 0$), alors : $Tr(q_{n-1} \circ f) = 0$, donc : $Tr(f_{n-1}) = 0$.

On pose ainsi : $u_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n-1}}.(e_{1,n-1} + e_{2,n-1} + ... + e_{n-1,n-1})$, il vérifie $||u_{n-1}|| = 1$ et $(f_{n-1}(u_{n-1})|u_{n-1}) = 0$, donc :

$(p_{n-1} \circ f(u_{n-1})|u_{n-1}) = (f(u_{n-1})|p_{n-1}(u_{n-1})) = (f(u_{n-1})|u_{n-1}) = 0$ (car $p_{n-1}(u_{n-1}) = u_{n-1}$). On a bien construit le second vecteur souhaité.

Puis on pose $E_{n-2} = \{u_{n-1}, u_n\}^{\perp}$, etc. ; jusqu'à $E_1 = \{u_2, u_3, ..., u_{n-1}, u_n\}^{\perp}$, qui est de dimension 1 et qui est stable par $p_1 \circ f$, où p_1 est la projection orthogonale sur E_1. Soit u_1 un vecteur unitaire quelconque de E_1 ; la famille $B = (u_1, u_2, ..., u_n)$ est une base orthonormale, on peut donc appliquer la formule *(i)* : Mais comme tous les $(f(u_i)|u_i)$ sont nuls pour $2 \leq i \leq n$, il ne reste que l'égalité : $Tr(f) = (f(u_1)|u_1) = 0$. On a obtenu ce qu'on voulait.

$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ (x\ \ y)\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0\} =$

$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ (ax + by\ \ \ bx + ay)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0\}$; soit : $f(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Si D est formé de deux droites orthogonales : $Vect(u) \cup Vect(v)$, où u et v sont unitaires, alors $B = (u, v)$ est une base orthonormale vérifiant les conditions de la question précédente. On en déduit que :

$$D = Vect(u) \cup Vect(v) \iff tr(f) = a + c = 0.$$

I2.3) Dans le plan affine euclidien orienté muni d'un repère orthonormal direct canonique, soit r la rotation de centre $I:(1, 2)$ et d'angle $-\pi/4$, et s la symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation $D:(2x + y = 1)$. Déterminer la nature, les éléments caractéristiques et l'expression analytique de la composée $r \circ s$.

- *Corrigé* : Il paraît plus simple d'utiliser les expressions complexes de ces transformations :

$z_I = 1 + 2i$; $r(z') = z'' \Rightarrow (z'' - z_I) = e^{-i\pi/4}.(z' - z_I) \Rightarrow ... \Rightarrow z'' = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)z' + 1 - \frac{3\sqrt{2}}{2} + (2 - \frac{\sqrt{2}}{2}).i$

$s(z) = z' = a\overline{z} + b$.

Un point quelconque de la droite D étant invariant : $s(x + (1 - 2x).i) = x + (1 - 2x).i = a(x - (1 - 2x).i) + b \Rightarrow \ldots$
$\Rightarrow \{a = \frac{1 - 2i}{1 + 2i} = \frac{-3}{5} - \frac{4}{5}.i,\ b = \frac{4}{5} + \frac{2}{5}.i\}$.

Par suite : $r\circ s(z) = r(s(z)) = r((\frac{-3}{5} - \frac{4}{5}.i)\overline{z} + \frac{4}{5} + \frac{2}{5}.i) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)((\frac{-3}{5} - \frac{4}{5}.i)\overline{z} + \frac{4}{5} + \frac{2}{5}.i) + 1 - \frac{3\sqrt{2}}{2} + (2 - \frac{\sqrt{2}}{2}).i = \ldots =$

$r\circ s(z) = \frac{-\sqrt{2}}{10}(7 + i)\overline{z} + 1 - \frac{9\sqrt{2}}{10} + (2 - \frac{7\sqrt{2}}{10}).i$.

C'est un antidéplacement ; on cherche ainsi s'il existe des invariants : $r\circ s(z) = z$.

Après calculs, il n'y en a pas ; c'est donc un antidéplacement non linéaire (ou symétrie glissée). Il est composée commutative d'une translation et d'une réflexion dont l'axe est dirigé par le vecteur de la translation. L'axe de la réflexion est dirigé par $\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 10 + 7\sqrt{2} \end{pmatrix}$; le vecteur de la translation est donc de la forme $\alpha.\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 10 + 7\sqrt{2} \end{pmatrix}$. Alors, en repassant dans l'ensemble des complexes :

$t\circ f(z) = f(z) + \alpha.(-\sqrt{2} + (10 + 7\sqrt{2}).i)$ doit admettre une droite invariante, donc :

$\frac{-\sqrt{2}}{10}(7 + i)\overline{z} + 1 - \frac{9\sqrt{2}}{10} + (2 - \frac{7\sqrt{2}}{10}).i + \alpha.(-\sqrt{2} + (10 + 7\sqrt{2}).i) = z \Leftrightarrow$

$-(\frac{7\sqrt{2}}{10} + 1).x - \frac{\sqrt{2}}{10}.y + 1 - \frac{9\sqrt{2}}{10} - \sqrt{2}.\alpha + (\frac{-\sqrt{2}}{10}.x + (\frac{7\sqrt{2}}{10} - 1)y + 2 - \frac{7\sqrt{2}}{10} + (10 + 7\sqrt{2})\alpha).i = 0.$

Or : $(5\sqrt{2} - 7)(-(\frac{7\sqrt{2}}{10} + 1).x - \frac{\sqrt{2}}{10}.y + 1 - \frac{9\sqrt{2}}{10} - \sqrt{2}.\alpha) = \frac{-\sqrt{2}}{10}.x + (\frac{7\sqrt{2}}{10} - 1)y - 16 + \frac{113\sqrt{2}}{10} + (7\sqrt{2} - 10).\alpha.$

Remarque : La première équation multipliée par $5\sqrt{2} - 7$ donne la seconde équation.

On en déduit : $\alpha = \frac{-9}{10} + \frac{3\sqrt{2}}{5}$; le vecteur de la translation est donc : $\begin{pmatrix} \frac{-6}{5} + \frac{9\sqrt{2}}{10} \\ \frac{-3}{5} - \frac{3\sqrt{2}}{10} \end{pmatrix}$, et l'axe de la réflexion a pour équation : $((\frac{7\sqrt{2}}{10} + 1).x + \frac{\sqrt{2}}{10}.y + \frac{1}{5} = 0)$, qu'on arrange en : $((10 + 7\sqrt{2}).x + \sqrt{2}.y + 2 = 0)$, la réflexion ayant pour expression complexe : $(z \mapsto \frac{-\sqrt{2}}{10}(7 + i)\overline{z} - \frac{1}{5}.(1 + (5\sqrt{2} - 7).i))$.

I2.4) Donner l'ensemble des isométries du plan affine euclidien laissant globalement invariant un triangle équilatéral ABC. Montrer que c'est un groupe pour la composition.

- *Corrigé* : L'ensemble des sommets {A, B, C} doit avoir pour image lui-même : f({A, B, C}) = {A, B, C} ; il n'y a donc que six possibilités (le nombre de permutations à trois éléments : 3!). Ainsi :

$(A, B, C) \mapsto (A, B, C), (A, C, B), (C, B, A), (B, A, C), (B, C, A)$, ou (C, A, B).

On suppose que ABC est dans le sens direct.

On note f_1 à f_6 les isométries correspondantes, si elles existent, et on les étudie une par une :

f_1 est l'application identique $((A, B, C) \mapsto (A, B, C))$.

f_2 est la réflexion d'axe la médiatrice de [BC] $((A, B, C) \mapsto (A, C, B))$.

f_3 est la réflexion d'axe la médiatrice de [AC] $((A, B, C) \mapsto (C, B, A))$.

f_4 est la réflexion d'axe la médiatrice de [AB] $((A, B, C) \mapsto (B, A, C))$.

f_5 est la rotation de centre le centre de gravité de ABC et d'angle $\frac{\pi}{3}$ $((A, B, C) \mapsto (B, C, A))$.

f_6 est la rotation de centre le centre de gravité de ABC et d'angle $-\frac{\pi}{3}$ $((A, B, C) \mapsto (C, A, B))$.

o	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_2	f_2	f_1	f_5	f_6	f_3	f_4
f_3	f_3	f_6	f_1	f_5	f_4	f_2
f_4	f_4	f_5	f_6	f_1	f_2	f_3

f_5	f_5	f_4	f_2	f_3	f_6	f_1
f_6	f_6	f_3	f_4	f_2	f_1	f_5

C'est un sous-groupe du groupe linéaire car non vide, stable par composition et stable par inversion.

I2.5) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation du plan affine euclidien d'expression analytique : $\{x' = (-3x + 4y + 13)/5,\ y' = (4x + 3y + 6)/5\}$ (où $M:(x, y) \mapsto M':(x', y')$).

- *Corrigé* : La matrice de la partie linéaire est $M = \begin{pmatrix} -3/5 & 4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$, elle vérifie : ${}^tMM = I$, c'est donc bien la matrice d'un endomorphisme orthogonal ; et comme $\det(M) = -1$, f est un antidéplacement.

Invariants : $\{x' = x$ et $y' = y\}$ est un système sans solution, il n'y a pas d'invariants ; c'est donc un antidéplacement non linéaire (ou symétrie glissée). On le décompose en produit commutatif d'une translation et d'une réflexion d'axe dirigé par le vecteur de la translation (qui est aussi vecteur directeur de l'axe de la partie linéaire) :

$M\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \Leftrightarrow (Y = 2X)$, donc l'axe de la partie linéaire est dirigé par $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Le vecteur de la translation lui étant colinéaire, on cherche α tel qu'en notant t la translation de vecteur $\alpha.\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $t \circ f$ soit une réflexion. Pour ce faire, on cherche les invariants de $t \circ f$:

$$t \circ f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) + \alpha.\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-3x + 4y + 13 + 5\alpha)/5 \\ (4x + 3y + 6 + 10\alpha)/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -8x + 4y = -13 - 5\alpha \\ 4x - 2y = -6 - 10\alpha \end{cases} \text{; donc : } \alpha = -1.$$

L'axe de la réflexion a pour équation : $(y = 2x - 2)$, et le vecteur de la translation est $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

I2.6) (*commun*) Montrer que deux isométries du plan affine euclidien sont égales si et seulement si elles coïncident en trois points non alignés.

- *Corrigé* : Soit A, B, C trois points non alignés et f et g des isométries telles que :

$A' = f(A) = g(A)$, $B' = f(B) = g(B)$, $C' = f(C) = g(C)$.

En notant F et G leurs parties linéaires respectives, alors : $\overrightarrow{A'B'} = F(\overrightarrow{AB}) = G(\overrightarrow{AB})$, $\overrightarrow{A'C'} = F(\overrightarrow{AC}) = G(\overrightarrow{AC})$; et comme F et G coïncident sur une base, elles sont égales. Par suite, f et g coïncidant sur un repère, elles sont aussi égales :

Soit la base $\mathscr{B} = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$; soit alors un vecteur quelconque u de E : $u = X.\overrightarrow{AB} + Y.\overrightarrow{AC}$; alors :

$F(u) = X.\overrightarrow{A'B'} + Y.\overrightarrow{A'C'}$. Mais, comme $G(u) = X.\overrightarrow{A'B'} + Y.\overrightarrow{A'C'}$, alors $G = F$.

De même, si $M:(x, y)$ est un point quelconque de $\mathcal{E}$: $f(M) = f(A) + F(\overrightarrow{AM}) = g(A) + G(\overrightarrow{AM}) = g(M)$.

Donc : $f = g$.