# I) Fiche : Transformations du plan et de l'espace.

$\mathcal{E}$ désigne l'espace affine euclidien orienté associé à l'espace vectoriel euclidien orienté $E$ muni d'une base orthonormale directe canonique $B$. On fixe une origine $O$ pour former le repère orthonormal direct $\mathcal{R} = (O\,;B)$.

1) Préliminaires.

- *Proposition* : Si $B'$ est une base orthonormale de matrice de passage $P$ dans $B$, alors $P^{-1} = {}^tP$, et :
$\det_B(B') = \det(P) = \pm 1$.

- *Orientation* : Étant donnée une base orthonormale de référence, toute base orthonormale dont le déterminant vaut $1$ dans cette base de référence est dite *directe*, et toute base orthonormale dont le déterminant y vaut $-1$ est dite *indirecte*. L'usage est d'utiliser le *sens inverse des aiguilles d'une montre* pour orienter le plan, et la règle des *trois doigts de la main droite* ou du *tire-bouchon*, pour orienter l'espace.

2) Groupe orthogonal. Isométries positives et négatives.

Une application de E dans lui-même qui conserve le produit scalaire est un endomorphisme orthogonal. On dit aussi une *isométrie vectorielle* bien que ce terme soit plus général et englobe les applications qui envoient $E$ dans un autre espace euclidien.

Comme son nom l'indique, un endomorphisme orthogonal est une application linéaire.

Un endomorphisme qui conserve la norme est un endomorphisme orthogonal, et réciproquement.

Un tel endomorphisme transforme toute base orthonormale en une base orthonormale.

**Réciproquement** : Un endomorphisme qui transforme une base orthonormale donnée en une base orthonormale est un endomorphisme orthogonal.

**Le déterminant d'un endomorphisme orthogonal vaut** $\pm 1$, **+1 s'il est positif**, **-1 s'il est négatif**.

L'ensemble des endomorphismes orthogonaux se répartit en deux sous-ensembles : Ceux qui transforment une base orthonormale directe en base orthonormale directe appelés : les *isométries positives*, et ceux qui la transforme en base orthonormale indirecte appelés : les *isométries négatives*.

L'ensemble des endomorphismes orthogonaux est un groupe pour la composition appelé : le groupe orthogonal, et noté : $\mathcal{O}(E)$. Le sous-ensemble des isométries positives en est un sous-groupe.

Une isométrie négative qui laisse invariant un hyperplan (exclusivement) est appelé : une *réflexion*. Tout endomorphisme orthogonal est produit de réflexions (en nombre pair s'il est positif, impair sinon).

**Proposition** : Si un sous-espace vectoriel $F$ est stable par un endomorphisme orthogonal, il en est de même de $F^{\perp}$.

Si un tel endomorphisme admet une **valeur propre**, elle vaut **±1** ; le sous-espace propre associé à la valeur propre $1$ s'appelle aussi : *L'ensemble invariant*. On peut le noter $E_1$ ou $Inv(f)$.

**Les sous-espaces propres** associés à des valeurs propres distinctes, s'il y en a, **sont orthogonaux**. Si un endomorphisme orthogonal est diagonalisable alors il existe une base orthonormale de vecteurs propres.

3) Matrices orthogonales, caractérisation.

Une matrice dont les colonnes forment une base orthonormale est appelée : *Matrice orthogonale*.

Caractérisation :

$M$ est une matrice orthogonale si et seulement si : $\boxed{{}^{t}M.M = I.}$

• L'ensemble des matrices orthogonales est un groupe pour la multiplication noté $\mathcal{O}(n)$. Le sous-ensemble des matrices orthogonales de déterminant $1$ en est un sous-groupe.

4) Classification des isométries du plan vectoriel euclidien.

Il n'y en a que deux sortes :

- Les réflexions, ou symétries axiales, qui admettent une droite de vecteurs propres, et de matrice : $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$. En notant que l'axe de la symétrie a un angle polaire de $\theta/2$.

- Les rotations qui admettent une matrice de la forme : $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ (rotation d'angle $\theta$). La rotation d'angle nul est l'application identique, et toute autre rotation n'admet pas d'invariant.

Toute rotation d'angle $\theta$ est produit de deux réflexions dont les axes forment entre eux un angle de $\theta/2$.

Étant donnés deux vecteurs $u$ et $v$ de même norme non nulle, il existe une unique rotation qui transforme $u$ en $v$.

En outre : $R_{\alpha} \circ R_{\beta} = R_{\alpha+\beta}$.

5) Classification des isométries de $E = \mathbb{R}^3$.

Toute isométrie de $E = \mathbb{R}^3$ admet au moins une valeur propre réelle.

$Inv(f)$ désignant son ensemble invariant :

| Inv(f) | Nature de f | Signe |
|---|---|---|
| E | $id_E$ | + |
| Plan | Réflexion | - |
| Droite | Rotation | + |
| $0_E$ | Antirotation | - |

• La trace de la matrice dans une base orthonormale d'une rotation d'angle $\theta$ est toujours égale à : $2.\cos(\theta) + 1$. Il est nécessaire pour connaître le signe de $\theta$ d'orienter l'axe de la rotation.

<u>Méthode pratique</u> : Si $u$ est un vecteur orientant l'axe de la rotation et $v$ un vecteur orthogonal à $u$ alors $v \wedge f(v) = k.u$ et le signe de $k$ donne le signe de l'angle ($|\theta|$ ne doit pas être supérieur à $\pi$).

Toute rotation est produit de deux réflexions dont les plans ont en commun l'axe de la rotation et formant entre eux un angle de $\theta/2$ en toute *coupe* orthogonale à l'axe de la rotation.

*Cas particulier* : une rotation d'angle $\pi$ est une symétrie axiale, appelée aussi : *demi-tour*.

• Toute antirotation est la composée commutative d'une réflexion et d'une rotation dont les invariants sont orthogonaux. Les antirotations sont parfois appelées *isométries gauches*.

<u>Méthode pratique</u> : Connaissant la matrice $M$ de $f$ dans la base canonique, on cherche d'abord le vecteur directeur $u_1$ de $E_{-1}$ dans la base canonique. On donne ensuite un vecteur $u_2$ orthogonal à $u_1$.

On trouve ensuite $\theta$ au signe près grâce à l'égalité $\cos(\theta) = \frac{1}{2}(\mathrm{tr}(M) + 1)$, et alors, si $u_1$ et $u_2$ sont unitaires :

$\sin(\theta) = \det(u_1, u_2, f(u_2))$ (selon l'orientation donnée par $u_1$).

6) <u>Endomorphismes symétriques</u>.

**Définition** : Un endomorphisme $f$ est un endomorphisme symétrique si et seulement si pour tout couple de vecteur $(u, v)$ on a : $(f(u)|v) = (u|f(v))$.

En particulier les homothéties, les projecteurs orthogonaux et les symétries orthogonales sont des endomorphismes symétriques (en outre les symétries orthogonales sont les seuls endomorphismes à la fois orthogonaux et symétriques).

La matrice d'un endomorphisme symétrique dans une base orthonormale est symétrique. Réciproquement toute matrice symétrique est la matrice d'un endomorphisme orthogonal dans une base orthonormale.

**Un endomorphisme symétrique est diagonalisable dans une base orthonormale de vecteurs propres**.

*Proposition* : Si un sous-espace vectoriel $F$ est stable par un endomorphisme symétrique, il en est de même de $F^{\perp}$.

7) Applications affines.

Une application de $\mathcal{E}$ dans lui-même est affine si et seulement s'il existe une application linéaire $F$, appelée la *partie linéaire* de $f$, telle que pour tout couple $A$ et $B$ de points de $\mathcal{E}$ : En notant $A' = f(A)$ et $B' = f(B)$ alors $\overrightarrow{A'B'} = F(\overrightarrow{AB})$.

La composée de deux applications affines est une application affine dont la partie linéaire est la composée de leurs deux parties linéaires.

Écriture matricielle : Si $\Phi$ est la matrice de $F$ dans la base $B$, et en notant l'image de l'origine $O$ par $f(O) = O' : (o_1, o_2, \dots, o_n)$, $M : (x_1, x_2, \dots, x_n)$ étant un point quelconque donné dans le repère $(O ; B)$, d'image $f(M) = M' : (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ alors :

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix} = \Phi . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o_1 \\ o_2 \\ \dots \\ o_n \end{pmatrix}.$$

8) Isométries affines.

Une application de $\mathcal{E}$ dans lui-même qui conserve la distance est une isométrie affine.

Une isométrie est une application affine dont la partie linéaire est un endomorphisme orthogonale, et réciproquement.

Une isométrie dont la partie linéaire est un endomorphisme orthogonal positif est un *déplacement*. Une isométrie dont la partie linéaire est un endomorphisme orthogonal négatif est un *antidéplacement*.

Les isométries dont la partie linéaire est $id_E$ sont les translations (et réciproquement). L'ensemble des translations est un groupe commutatif pour la composition. Avec :

$$t_u o t_v = t_{u+v}, \quad t_u^{-1} = t_{-u}, \quad t_{\vec{0}} = id_{\mathcal{E}}.$$

Une isométrie admettant un hyperplan invariant est une réflexion ; sa partie linéaire est une réflexion vectorielle (mais une réflexion vectorielle peut être la partie linéaire d'autres types d'isométries affines).

Toute isométrie affine est produit de réflexions (en nombre pair pour un déplacement, impair pour un antidéplacement).

9) Isométries du plan affine $\mathcal{E}$.

| Inv(f) | Nature | Partie linéaire | Signe |
|---|---|---|---|
| $\mathcal{E}$ | $id_{\mathcal{E}}$ | $id_E$ | Déplacement |
| Droite | Réflexion | Réflexion | Antidéplacement |
| Point | Rotation | Rotation | Déplacement |
| $\varnothing$ | Symétrie glissée | Réflexion | Antidéplacement |
| $\varnothing$ | Translation | $id_E$ | Déplacement |

Étant donnés deux points distincts A et B du plan, il existe une unique réflexion qui échange A et B.

La composée de deux réflexions est une translation si leurs axes sont parallèles, une rotation sinon.

• Une symétrie glissée est la composée commutative d'une réflexion et d'une translation dont le vecteur dirige l'axe de la symétrie, et ceci d'une manière unique (pour qu'il y ait commutativité).

Expressions complexes : En notant $M' = f(M)$ avec $M':(z')$ et $M:(z)$,

**Translation** de vecteur $u$ : $z' = z + z_u$.

**Rotation** de centre $\Omega:(\omega)$ et d'angle $\theta$ : $z' - \omega = e^{i\theta}.(z - \omega)$.

**Réflexion** : $z' = e^{i\theta}.\bar{z} + ki.e^{i\theta/2}$ où $k$ est un réel (l'angle polaire de l'axe est $\theta/2$).

10) Isométries de l'espace $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$.

***Déplacements*** : $Id_{\mathcal{E}}$, translations, rotations, vissages (composée des deux précédentes).

Les parties linéaires des déplacements sont des endomorphismes orthogonaux positifs. La partie linéaire d'une translation est $id_E$, celle d'une rotation ou d'un vissage est une rotation.

• Les parties linéaires des antidéplacements sont endomorphismes orthogonaux négatifs : réflexions ou antirotations. Les seuls antidéplacements étudiés sont les réflexions, admettant un plan invariant et dont la partie linéaire est une réflexion vectorielle. Ce sont des symétries orthogonales par rapport à ce plan invariant $P$ : $M' = s_P(M) \Leftrightarrow (MM')\perp P$ et $I \in P$ où $I$ est le milieu de $[MM']$.

- *Cas particulier* : Antidéplacement associé à l'homothétie de rapport $-1$, à savoir $-id_E$ ; c'est une homothétie de rapport $-1$ et de centre l'unique point invariant. C'est donc une symétrie centrale.

La composée de deux réflexions est une translation si leurs plans sont parallèles et une rotation d'axe l'intersection de ces deux plans sinon (d'angle le double de l'angle entre les deux plans).

- *Expression d'une rotation* : $M' = r_{u,\theta}(M)$ (où $u$ est un vecteur directeur de l'axe $\Delta$ lui donnant son orientation) $\Leftrightarrow$ $HM' = HM$ et $(\widehat{\overrightarrow{HM},\overrightarrow{HM'}}) = \theta$ (selon l'orientation donnée par $u$) où $H$ est le projeté orthogonal de $M$ sur $\Delta$.

• Une rotation d'angle $\pi$ est aussi une symétrie axiale ou *demi-tour*.

• Un vissage est la composée d'une rotation et d'une translation dont le vecteur n'est pas orthogonal à l'axe de la rotation. Les rotations et les translations sont des cas particuliers de vissage. Tout vissage est la composée commutative d'une rotation et d'une translation dont le vecteur dirige l'axe de la rotation.

• Les déplacements sont la composée de deux réflexions. Les antidéplacements distincts des réflexions sont la composée de trois réflexions.

## Décomposition pratique d'un déplacement en réflexions :

- Une **translation** de vecteur $u:\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ non nul est composée de deux symétries dont les plans sont parallèles ; $t_u = S_{P'} o S_P$ avec :

$\mathscr{P}:(ax + by + cz = 0)$ et $\mathscr{P}':(ax + by + cz + d = \frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2))$.

- Une **rotation** $r$ d'angle $\theta$ d'axe $\mathscr{D}$ passant par un point $\Omega$, dirigé et orienté par $u$ unitaire est produit de deux réflexions dont les plans invariants ont en commun l'axe de la rotation. Soit $v$ unitaire orthogonal à $u$ et $\mathscr{P} = (\Omega\,;\,u, v)$. Alors $r = S_{P'} o S_P$ avec :

$\mathscr{P}' = (\Omega\,;\,u, \cos(\theta/2).v + \sin(\theta/2).(u\wedge v))$.