NOTIONS sur les ESPACES AFFINES

I) Cours.

- *Définitions* : Étant donné un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, où $\mathbb{K}$ est un corps commutatif, un ensemble $\mathcal{E}$ est un espace affine relativement à E si et seulement s'il existe une application ϕ de $\mathcal{E}^2$ dans E vérifiant :

- Étant donné un élément O de $\mathcal{E}$ fixé, l'application ϕ_O de $\mathcal{E}$ dans E telle que $\phi_O(M) = \phi(O, M)$ est bijective.

- Pour tout triplet (A, B, C) d'éléments de $\mathcal{E}$, on a : $\phi(A, C) = \phi(A, B) + \phi(B, C)$.

Les éléments de $\mathcal{E}$ sont appelés des *points*. On note plus simplement $\phi(A, B) = \overrightarrow{AB}$. La seconde propriété de ϕ est ainsi la *relation de Chasles* : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Lorsque l'espace vectoriel est euclidien, l'espace affine est aussi appelé *espace affine euclidien*. De même, si E est un espace euclidien orienté, $\mathcal{E}$ est un espace affine euclidien orienté.

Un espace vectoriel est donc un espace affine relativement à lui-même, en particulier $\mathbb{R}^n$. Par construction, on fixe un point O de $\mathcal{E}$ qu'on appelle *origine*, et tout point de $\mathcal{E}$ peut être donné par les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans une base de l'espace vectoriel E. La donnée d'une origine O de $\mathcal{E}$ et d'une base $\mathcal{B}$ de E est un *repère* : $\mathcal{R} = (O; \mathcal{B})$. Si l'espace est euclidien et que la base est orthonormale, le repère est dit aussi : *repère orthonormal* (ou *orthonormé*) ; si la base est orthonormale directe, le repère est orthonormal direct.

L'espace affine $\mathbb{R}^2$ est plus simplement appelé : le *plan affine*, et l'espace affine $\mathbb{R}^3$ est plus simplement appelé : l'*espace ordinaire*.

Le couple $(A; U)$ formé d'un point fixé A de $\mathcal{E}$ et d'un sous-espace vectoriel U de E est appelée *variété affine* passant par A et de direction U, et on pose $\dim((A; U)) = \dim(U)$. Une variété affine de dimension nulle est un point, de dimension 1 une droite, de dimension 2 un plan, etc. On note $(A_1A_2...A_n)$ la variété affine de dimension minimale passant par les points $A_1, A_2, ..., A_n$. Si $A \neq B$, (AB) est la droite passant par A et B. Si A, B et C ne sont pas alignés (ABC) est le plan passant par A, B et C. Etc...

Une droite peut être donnée dans un repère $\mathcal{R} = (O ; \mathcal{B})$, avec $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$, par une représentation paramétrique ou une représentation cartésienne : Si D est la droite passant par $A:(a_1, a_2, ..., a_n)$ dirigée par $u:\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$, alors : $M:(x_1, x_2, ..., x_n) \in D \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = a_1 + \lambda\alpha_1 \\ \vdots \\ x_n = a_n + \lambda\alpha_n \end{cases}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$ (représentation paramétrique).

Si on élimine λ de ces n équations, il restent $n - 1$ équations liant x_1 à x_n ; c'est la représentation cartésienne de D. Ainsi, une droite admet une seule équation cartésienne dans le plan, et deux dans l'espace.

Un plan peut aussi être donnée dans un repère $\mathcal{R} = (O ; \mathcal{B})$, avec $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ $(n \geq 3)$, par une représentation paramétrique ou une représentation cartésienne : Si P est le plan passant par $A:(a_1, a_2, ..., a_n)$, dirigé par $u:\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$ et $v:\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}$, alors : $M:(x_1, x_2, ..., x_n) \in P \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = a_1 + \lambda\alpha_1 + \mu\beta_1 \\ \vdots \\ x_n = a_n + \lambda\alpha_n + \mu\beta_n \end{cases}$ pour $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ (représentation paramétrique).

Si on élimine λ et μ de ces n équations, il restent $n - 2$ équations liant x_1 à x_n ; c'est la représentation cartésienne de P. Ainsi, un plan admet une seule équation cartésienne dans l'espace.

Deux droites distinctes du plan sont soit parallèles (dirigées par le même vecteur) soit sécantes. Si les vecteurs qui les dirigent sont orthogonaux, les droites sont orthogonales et perpendiculaires.

Deux droites de l'espace ne sont pas forcément sécantes ; si les vecteurs qui les dirigent sont orthogonaux, elles sont orthogonales. Deux droites orthogonales et sécantes sont perpendiculaires.

Deux plans distincts de l'espace sont soit parallèles soit sécants. S'ils sont sécants ils se coupent selon une droite. Il n'y a pas de plans orthogonaux dans l'espace. Deux plans sécants admettant respectivement deux directions orthogonales entre elles et orthogonales à leur direction commune sont perpendiculaires.

Une application de $\mathcal{E}$ dans lui-même est affine si et seulement s'il existe une application linéaire F, appelée la *partie linéaire* de f, telle que pour tout couple A et B de points de $\mathcal{E}$: En notant $A' = f(A)$ et $B' = f(B)$ alors $\overrightarrow{A'B'} = F(\overrightarrow{AB})$. Les applications affines sont encore appelées : *transformations affines* (le mot « transformation » sert plus généralement à désigner les applications d'un espace affine dans lui-même). Étant donné une origine O, on peut écrire abusivement : $f(M) = f(O) + F(\overrightarrow{OM})$. On dit que F est associée à f, ou bien que c'est sa *partie linéaire*.

- *Proposition* : La composée de deux applications affines est une application affine dont la partie linéaire est la composée de leurs deux parties linéaires.

- *Exemples de transformations affines* : Les translations, les homothéties, les projections et les symétries. Elles sont définies de la façon suivante :

• Translation de vecteur u : $M' = t_u(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = u$; l'application linéaire associée est id_E. On peut écrire abusivement $t_u(M) = M + u$.

• Homothétie de centre A et de rapport k : $M' = h_{A,k}(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM'} = k.\overrightarrow{AM}$. L'application linéaire associée est l'homothétie vectorielle de rapport k. Réciproquement, toute application affine associée à une homothétie vectorielle est une homothétie ponctuelle. (Preuve immédiate).

• Étant donnés deux sous-espaces vectoriels supplémentaires U et V de E, et un point fixé A de $\mathcal{E}$, la projection p sur (A; U) de direction V est définie par : $M' = p(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} \in V$ et $M' \in (A; U)$. L'application linéaire associée est la projection vectorielle sur U de direction V. Si E est euclidien et $U \perp V$ la projection est une projection orthogonale sur (A; U).

• Étant donnés deux sous-espaces vectoriels supplémentaires U et V de E, et un point fixé A de $\mathcal{E}$, la symétrie s par rapport à (A; U) de direction V est définie par : $M' = s(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} \in V$ et $I \in (A; U)$ où I est le point tel que $\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{IM'}$ (le milieu du segment [MM']). L'application linéaire associée est la symétrie vectorielle par rapport à U de direction V. Si E est euclidien et $U \perp V$ la symétrie est une symétrie orthogonale par rapport à (A; U).

• Projections orthogonales : Soit F un sous-espace vectoriel de E et p la projection orthogonale sur F. Si $(e_1, e_2, ..., e_k)$ est une base orthonormale de F alors : $\forall u \in E$, $p(u) = (u|e_1).e_1 + (u|e_2).e_2 + ... + (u|e_k).e_k$. (À noter que la symétrie orthogonale s par rapport à F vérifie toujours : $s = 2p - id_E$).

<u>Écriture matricielle</u> : Si Φ est la matrice de F dans la base B, et en notant l'image de l'origine O par $f(O) = O' : (o_1, o_2, ..., o_n)$, $M : (x_1, x_2, ..., x_n)$ étant un point quelconque donné dans le repère (O ; B), d'image $f(M) = M' : (x'_1, x'_2, ..., x'_n)$ alors :

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \cdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \Phi.\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o_1 \\ o_2 \\ \cdots \\ o_n \end{pmatrix}.$$

II) Concours : Centrale-Supélec 2005 - Mathématiques II (*m05ci2e*).

Soit $\mathbb{P}$ le plan vectoriel $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel et orienté par la base canonique $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On notera $o = (0, 0)$ l'origine du plan. Tout élément (x, y) de $\mathbb{P}$ peut s'interpréter comme un point p de coordonnées (x,y) dans le repère $(o ; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, ou comme un vecteur $\vec{p}$ de coordonnées (x, y) dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Pour deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ de $\mathbb{P}$, on note $<\vec{u}|\vec{v}>$ leur produit scalaire et $\det(\vec{u}, \vec{v})$ leur déterminant dans toute base orthonormale directe ; on désigne par U l'ensemble des vecteurs de norme 1, et pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on note $(\vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))$ le repère polaire défini par :

$$\vec{u}(\theta) = \cos(\theta).\vec{\imath} + \sin(\theta).\vec{\jmath}, \quad \vec{v}(\theta) = -\sin(\theta).\vec{\imath} + \cos(\theta).\vec{\jmath}.$$

On rappelle qu'étant donnés $m \in \mathbb{P}$ et $\vec{w} \in \mathbb{P}\setminus\{\vec{o}\}$, la droite affine passant par m et de vecteur directeur $\vec{w}$ est l'ensemble d des éléments de $\mathbb{P}$ pouvant s'écrire : $d = m + \mathbb{R}.\vec{w} = \{p \in \mathbb{P} \mid \exists\, \lambda \in \mathbb{R},\ p = m + \lambda.\vec{w}\}$.

On appelle alors *axe* du plan $\mathbb{P}$ tout couple $\delta = (d, \vec{w})$ formé d'une droite affine d, appelée support de δ, et d'un vecteur $\vec{w}$, vecteur directeur de d de norme 1. Un axe est ainsi une droite affine orientée. Réciproquement, chaque droite affine d définit deux axes d'orientations opposées : $(d, \vec{w})$ et $(d, -\vec{w})$.

Partie I : *Modèle cylindrique de l'ensemble des axes du plan*. On note $\mathbf{E}$ l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel et orienté par la base canonique $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$. Dans tout le problème, les lettres minuscules désignent les objets relatifs à $\mathbb{P}$ (points, vecteurs, droites, coordonnées), tandis que les lettres majuscules concerneront les objets relatifs à $\mathbf{E}$; on notera ainsi (x, y) les coordonnées des éléments de $\mathbb{P}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, et (X, Y, Z) celles des éléments de $\mathbf{E}$ dans la base $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$.

I.A. Caractériser l'ensemble $\mathscr{C} = U\times\mathbb{R}$ par une équation cartésienne en (X, Y, Z), puis montrer que $\mathscr{C}$ est un cylindre de révolution de $\mathbf{E}$ dont on précisera l'axe de révolution, les génératrices et les parallèles.

I.B.1. On considère un axe $\delta = (d, \vec{w})$ défini par $m \in \mathbb{P}$ et $\vec{w} \in U$, en posant : $d = m + \mathbb{R}.\vec{w}$. Montrer que, lorsque p décrit la droite d, le réel $\det(p, \vec{w})$ reste constant ; on notera h_δ sa valeur. Interpréter géométriquement ce réel h_δ à l'aide du projeté orthogonal m_o de l'origine o sur d. Montrer que $m_o = -h_\delta.r_{\pi/2}(\vec{w})$ où $r_{\pi/2}$ est la rotation vectorielle d'angle $\pi/2$.

I.B.2. Soit $\vec{w} = \vec{u}(\theta)$ pour $\theta \in \mathbb{R}$, et $k \in \mathbb{R}$; considérant l'axe $\delta = (d, \vec{u}(\theta))$ avec : $d = -k.\vec{v}(\theta) + \mathbb{R}.\vec{u}(\theta)$, calculer h_δ et caractériser d par une équation cartésienne en (x, y).

I.B.3. Montrer que l'application $H:\delta = (d, \vec{w}) \mapsto (\vec{w}, h_\delta)$ définit une bijection entre Δ et le cylindre $\mathscr{C}$. Soit $M = (\vec{w}, k) \in \mathscr{C}$; indiquer par un schéma la construction de $\delta = H^{-1}(M)$ à partir de $\vec{w}$ et k dans le cas $k > 0$. À chaque axe de Δ est ainsi associé bijectivement un point de $\mathscr{C}$. Le cylindre $\mathscr{C}$, image de Δ par H,devient ainsi une représentation de l'ensemble des axes. On se propose dans le reste de cette partie de déchiffrer sur cette représentation quelques propriétés géométriques relatives aux axes du plan $\mathbb{P}$.

I.C. Chaque partie du cylindre $\mathscr{C}$ est l'image par la bijection H d'une partie de Δ. Caractériser précisément en termes géométriques les ensembles des axes du plan $\mathbb{P}$ correspondant respectivement : 1) À une génératrice de $\mathscr{C}$. 2) À l'ensemble $U\times\{0\}$. 3) À un parallèle de $\mathscr{C}$.

Etc..