J) Fiche : Formes quadratiques, quadriques.

1) Définition 1. $\phi : E \to \mathbb{R}$ est une forme quadratique si et seulement si : elle est paire, et si la fonction $(u, v) \mapsto (\phi(u + v) - \phi(u) - \phi(v))/2$ est une forme bilinéaire symétrique.

2) Définition 2. $\phi : E \to \mathbb{R}$ est une forme quadratique si et seulement si : $\phi(0) = 0$, et si la fonction $(u, v) \mapsto (\phi(u + v) - \phi(u - v))/4$ est une forme bilinéaire symétrique.

$\forall\, u \in E,\ \phi(u) = f(u, u)$ (où f est définie selon l'une des définitions 1 ou 2).

$\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$ et $\forall\, u \in E,\ \phi(\alpha.u) = \alpha^2.\phi(u)$.

3) Diagonalisation.

Expression générale : Pour $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\phi(u) = \sum_{i=1}^{n} a_i.x_i^2 + 2.\sum_{1 \leq i < j \leq n} b_{ij}.x_i x_j$.

(Les carrés et les doubles produits ; on en déduit une *troisième définition* : ϕ est une forme quadratique si et seulement elle s'exprime dans une base comme un polynôme du second degré à plusieurs variables ne contenant que des monômes du second degré).

- Une forme quadratique positive ($\forall\, u \in E,\ \phi(u) \geq 0$) et non dégénérée ($\phi(u) = 0 \Rightarrow u = 0_E$) est le carré d'une norme.

- La matrice d'une forme quadratique dans une base orthonormale est symétrique (c'est la matrice de la forme bilinéaire symétrique associée). Par exemple en dimension 3 :

$$M = \begin{pmatrix} \phi(e_1) & f(e_1, e_2) & f(e_1, e_3) \\ f(e_2, e_1) & \phi(e_2) & f(e_2, e_3) \\ f(e_3, e_1) & f(e_3, e_2) & \phi(e_3) \end{pmatrix}.$$

La matrice d'une forme quadratique est diagonalisable dans une base orthonormale de vecteurs propres. Il convient donc de calculer le polynôme caractéristique mais même sachant qu'il admet le nombre convenable de racines réelles, il ne sera pas forcément toujours possible de le factoriser (par exemple : $-\lambda^3 + \lambda + 1$).

La matrice de changement de base P est ainsi une matrice orthogonale et vérifie donc : $P^{-1} = {}^tP$ (d'où $PDP^{-1} = PD{}^tP$ (la première est la formule de changement de base d'un endomorphisme et la seconde celle d'une forme bilinéaire)).

4) Application à l'étude des coniques.

Soit $\mathscr{R} = (O; B)$ un repère du plan et $\Gamma:(\phi(x, y) + \alpha.x + \beta.y + \gamma = 0)$, où $\phi(x, y) = a.x^2 + b.xy + c.y^2$.
On note plus simplement : $f(x,y) = \phi(x, y) + \alpha.x + \beta.y + \gamma = a.x^2 + b.xy + c.y^2 + \alpha.x + \beta.y + \gamma$.

Il existe une base B' de matrice P dans laquelle $\phi(x, y) = a'x'^2 + b'y'^2$. Alors :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P.\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Ce qui permet de remplacer x et y par leur expression en fonction de x' et y' dans l'équation de Γ qui devient : $a'x'^2 + b'y'^2 + \alpha'.x' + \beta'.y' + \gamma' = 0$

En changeant l'origine du repère, on arrive à deux types possibles d'équations, où x" et y" sont les coordonnées dans le nouveau repère :

$$a'x''^2 + b'y''^2 + \gamma'' = 0 \text{ ou } b'y''^2 + \alpha''x'' = 0 \text{ (ou } a'x''^2 + \beta''y'' = 0).$$

Qui sont respectivement les équations d'une conique à centre (ellipse ou hyperbole) ou d'une parabole.

- *Remarque 1* : Il est possible d'anticiper la nature du résultat final en calculant tout de suite le discriminant de la forme quadratique[1] (qui peuvent être dégénérées ou non) :

$\Delta_\phi < 0 \rightarrow$ ellipse ; $\Delta_\phi = 0 \rightarrow$ parabole ; $\Delta_\phi > 0 \rightarrow$ hyperbole.

- *Remarque 2* : Le centre $\Omega:(x_0, y_0)$ d'une conique à centre vérifie $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$.

- ***Tangentes*** :

Ellipse : $\left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1\right) \rightarrow$ la tangente en $M_1:(x_1, y_1)$: $\left(\dfrac{xx_1}{a^2} + \dfrac{yy_1}{b^2} = 1\right)$.

Hyperbole : $\left(\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1\right) \rightarrow$ la tangente en $M_1:(x_1, y_1)$: $\left(\dfrac{xx_1}{a^2} - \dfrac{yy_1}{b^2} = 1\right)$.

Parabole : $\left(y^2 = 2px\right) \rightarrow$ la tangente en $M_1:(x_1, y_1)$: $\left(yy_1 = p(x + x_1)\right)$.

5) Définition générale des cylindres et des cônes.

Dans l'espace ordinaire, une surface $\mathscr{C}$ est un cylindre si et seulement s'il existe un vecteur non nul u tel que : pour tout point M de $\mathscr{C}$, la droite $\Delta = (M, u)$ est contenue dans $\mathscr{C}$. La droite Δ est appelée une *génératrice* de $\mathscr{C}$; un cylindre est donc la réunion de ses génératrices.

$\mathscr{C}$ est un cône si et seulement s'il existe un point S tel que pour tout point M de $\mathscr{C}$ distinct de S, la droite (SM) est contenue dans $\mathscr{C}$. Le point S est un *sommet* du

[1] Une conique conserve son genre dans un repère non orthonormal ; il est donc aussi possible de le connaître en réduisant la forme quadratique par la méthode de Gauss du §8.

cône, et la droite (SM) est une *génératrice* du cône. Un cône non réduit à un point est égal à l'ensemble de ses génératrices.

Un cône dont l'équation cartésienne $(P(x, y, z) = 0)$ est donnée par un polynôme P du second degré à trois variables, est appelé : *cône du second degré*. Le sommet S d'un tel cône vérifie :

$$\frac{\partial P}{\partial x}(S) = \frac{\partial P}{\partial y}(S) = \frac{\partial P}{\partial z}(S) = 0.$$

Une partie $\mathcal{A}$ telle que son intersection avec toute génératrice de $\mathcal{C}$ est non vide (et distincte du sommet pour un cône) est appelée une *directrice* de $\mathcal{C}$.

- Dans le cas d'un cône, une directrice contenue dans un plan ne contenant pas le sommet est appelée : *section plane*.

- Dans le cas d'un cylindre, une section plane orthogonale à la direction des génératrices est une *section droite*.

Dans le cas particulier où il existe une directrice (une section plane) qui soit une conique, il est possible de trouver un repère dans lequel l'équation de $\mathcal{C}$ est un polynôme du second degré sous forme réduite ; $\mathcal{C}$ est alors une *quadrique*.

• *Équation générale du cylindre* : La formule générale qui permet de déduire la représentation paramétrique ou cartésienne du cylindre est :

$$M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \exists N \in \Gamma \text{ et } \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tels que } \overrightarrow{MN} = \lambda.u.$$

- *Cas particulier du cylindre circulaire* : Si on connaît un point I et un vecteur directeur u de l'axe du cylindre, ainsi que son rayon R ; alors :

$$R = ||u \wedge \overrightarrow{IM}||/||u||$$ (élevé au carré donne l'équation cartésienne du cylindre).

• *Équation générale d'un cône* : Étant donné une directrice Γ et le sommet S du cône $\mathcal{C}$, on a :

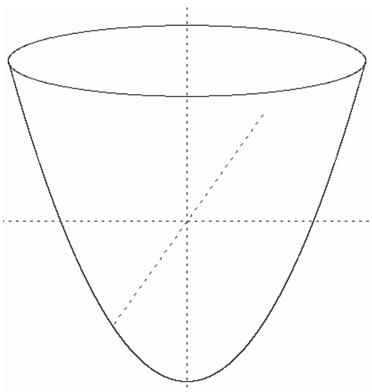
$$M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \exists N \in \Gamma \text{ et } \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tels que } \overrightarrow{SM} = \lambda.\overrightarrow{SN}.$$

- *Cas particulier du cône circulaire droit* : Connaissant le sommet S, le vecteur directeur de l'axe u, et l'angle au sommet α du cône :

$$SM.\sin(\alpha/2) = ||u \wedge \overrightarrow{SM}||/||u||$$ (élevée au carré donne l'équation cartésienne du cône).

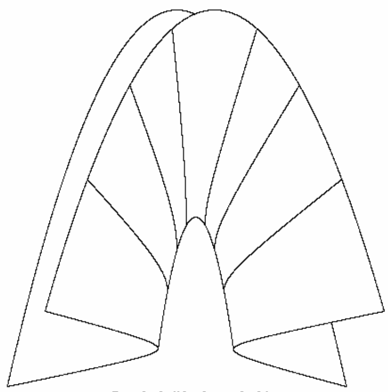
6) <u>Quadriques</u>.

Une quadrique est une surface dont équation cartésienne est un polynôme du second degré à trois variables. Après réduction (par la même méthode que les coniques), il existe un repère orthonormal de l'espace dans lequel l'équation est réduite :



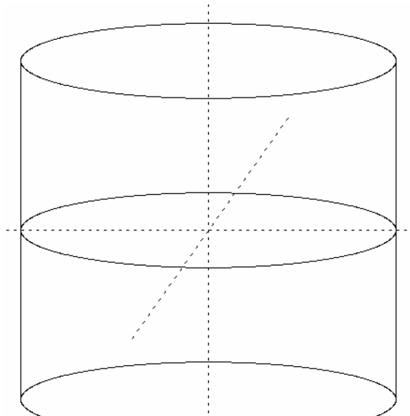
Paraboloïde elliptique

$X^2/A^2 + Y^2/B^2 = Z/C$



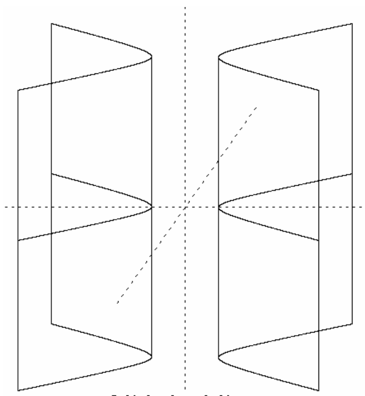
Paraboloïde hyperbolique

$X^2/A^2 - Y^2/B^2 = Z/C$



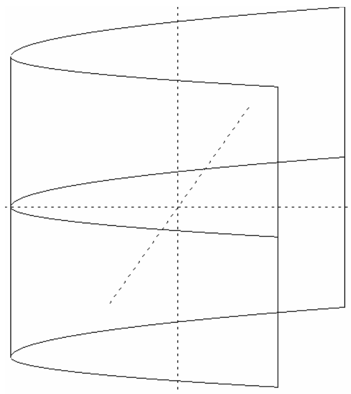
Cylindre elliptique

$X^2/A^2 + Y^2/B^2 = 1$



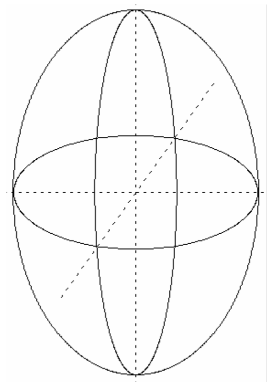
Cylindre hyperbolique

$X^2/A^2 - Y^2/B^2 = 1$



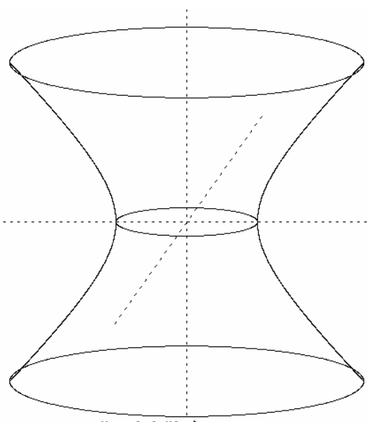
Cylindre parabolique

$Y^2 = 2pX$



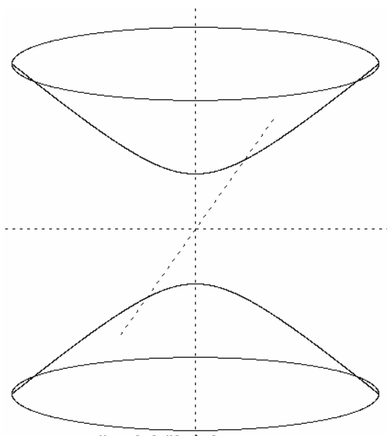
Ellipsoïde

$X^2/A^2 + Y^2/B^2 + Z^2/C^2 = 1$



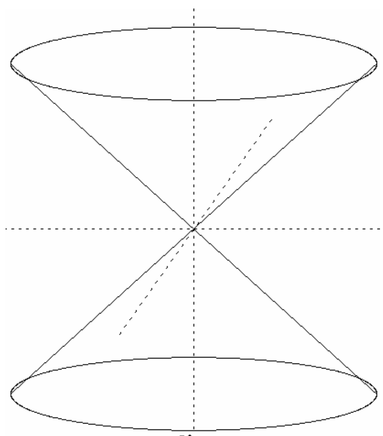
Hyperboloïde à une nappe

$X^2/A^2 + Y^2/B^2 - Z^2/C^2 = 1$



Hyperboloïde à deux nappes

$X^2/A^2 + Y^2/B^2 - Z^2/C^2 = -1$



Cône

$X^2/A^2 + Y^2/B^2 - Z^2/C^2 = 0.$