K) Fiche : Équations différentielles.

1) Définition. Solutions maximales, problème de Cauchy.

Définition, *équation différentielle d'ordre n* : $x^{(n)} = F(t, x, x', x'', ..., x^{(n-1)})$.

Solution maximale : Solution sur un intervalle I telle qu'il n'existe pas une autre solution sur un intervalle J contenant strictement I.

Problème de Cauchy de $x^{(n)} = F(t, x, x', x'', ..., x^{(n-1)})$ au point $(t_0, x_0, x_1, ..., x_{n-1})$: C'est la recherche d'une fonction $f : I \to E$ (où I est un intervalle réel) n fois dérivable solution de l'équation différentielle et telle que : $t_0 \in I$, $f(t_0) = x_0$, $f'(t_0) = x_1$, ..., $f^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}$.

2) Équations linéaires d'ordre n. Systèmes linéaires du premier ordre à coefficients constants.

On appelle équation différentielle *linéaire* d'ordre n l'équation : $x^{(n)} = \phi(t) + a_0(t)x + a_1(t)x' + ... + a_{n-1}(t)x^{(n-1)}$, où les $a_i(t)$ et $\phi(t)$ sont des fonctions numériques continues sur l'intervalle I dans lequel on donne les solutions. Si $\phi(t) = 0$ sur I (ou si on le supprime sciemment), on dit que l'équation est homogène (sinon on dit qu'elle est complète).

Pour $x^{(n)} = a_0(t)x + a_1(t)x' + ... + a_{n-1}(t)x^{(n-1)}$, soit $x_0 = x$, $x_1 = x'$, ..., $x_n = x^{(n)}$, alors :

$$X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{pmatrix}, \text{ et } X' = AX.$$

Dans le cas général : $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$, et $X' = AX \Leftrightarrow \begin{cases} x_1' = a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + ... + a_{1,n}x_n \\ x_2' = a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + ... + a_{2,n}x_n \\ \vdots \\ x_n' = a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + ... + a_{n,n}x_n \end{cases}$

(Système linéaire homogène).

3) Théorème d'existence et d'unicité.

- *Système linéaire homogène* **:**

Étant donné un réel t_o et un vecteur X_o fixés, il existe une et une seule solution à l'équation $X' = AX$ telle que $X(t_o) = X_o$. (Cas particulier du précédent car $F(t, X) = AX$ implique que les dérivées partielles de la fonction F sont constantes, égales aux vecteurs colonnes de la matrice A).

- *Équation différentielle linéaire d'ordre n* : On se place dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et I est un intervalle réel.

Soit $a_0, a_1, ..., a_n$ et b des fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$.

Étant donnés $t_0 \in I$ et les scalaires $x_0, x_1, ..., x_{n-1}$, si $a_n(t)$ ne s'annule pas sur I il existe une et une seule solution maximale x à l'équation différentielle $a_0(t)x + a_1(t)x' + ... + a_n(t)x^{(n)} = b(t)$ vérifiant les conditions initiales : $x(t_o) = x_o$, $x'(t_o) = x_1$, ..., $x^{(n-1)}(t_o) = x_{n-1}$.

4) Résolution d'un système non homogène : $X' = AX + B$.

Si X_0 est la solution générale de l'équation homogène $X' = AX$, et X_p une solution particulière de l'équation complète alors la solution générale de l'équation complète est la somme : $\boxed{X = X_0 + X_p}$.

5) Structure vectorielle et dimension de l'espace des solutions. Cas où A est diagonalisable, trigonalisable.

• L'ensemble des solutions de l'équation $x^{(n)} = a_0(t)x + a_1(t)x' + ... + a_{n-1}(t)x^{(n-1)}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions n fois dérivables (ou continues) d'un intervalle réel I dans $\mathbb{K}$. En outre, ce sous-espace est de dimension n.

- *Proposition* : Si x_0 est la solution générale de l'équation homogène et x_p une solution particulière de l'équation complète ($a_0(t)x + a_1(t)x' + ... + a_n(t)x^{(n)} = b(t)$), alors $x = x_0 + x_p$ est la solution générale de l'équation complète.

• L'ensemble des solutions de l'équation $X' = AX$ est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions continues d'un intervalle réel I à valeurs dans E.

Si A est diagonalisable avec pour matrice de passage P et pour valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, alors :

$$\boxed{X = P.\begin{pmatrix} k_1.e^{\lambda_1 t} \\ k_2.e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ k_n.e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}},\ \text{où les } k_i \text{ sont des constantes de } \mathbb{K}.$$

Si A est trigonalisable avec pour matrice de passage P il existe alors une matrice triangulaire T telle que $A = PTP^{-1}$ et l'équation $Y' = TY$ est lié à un système où la dernière des équations est directement résoluble, et où les autres peuvent ensuite être résolues de proche en proche. À la fin : $X = PY$.

- *Application à l'équation complète* : L'ensemble des solutions de la forme $X = X_0 + X_p$ peut être interprété : soit comme le translaté d'un sous-espace vectoriel, soit comme une variété affine.

6) Cas particulier des équations linéaires à coefficients constants. Application aux équations du second ordre.

Étant donnée l'équation homogène : $a_0x + a_1x' + ... + a_nx^{(n)} = 0$ (où $a_n \neq 0$), et son polynôme caractéristique : $P(r) = a_0 + a_1r + ... + a_nr^n$, alors si r est une racine de multiplicité m de P, pour tout $q < m$, $x(t) = t^q.e^{rt}$ est une solution de l'équation différentielle.

Soit l'équation $ax'' + bx' + cx = 0$, où le corps des scalaires est $\mathbb{R}$ et où $a \neq 0$; on note $\Delta = b^2 - 4ac$, le discriminant du polynôme caractéristique associé. Alors :

Si $\Delta > 0$ il y a deux racines réelles r_1 et r_2, et $x = \alpha.e^{r_1 t} + \beta.e^{r_2 t}$ $((\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2)$.
Si $\Delta = 0$ il y a une racine réelle double r, et alors $x = (\alpha t + \beta).e^{rt}$ $((\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2)$.
Si $\Delta < 0$ il y a deux racines conjuguées $r \pm i\omega$, et $x = (\alpha.\cos(\omega t) + \beta.\sin(\omega t)).e^{rt}$ $((\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2)$.

7) Résolution des équations linéaires du premier ordre, méthode de variation des constantes.

Soit l'équation homogène $x' = a(t)x$. Si $A(t)$ est une primitive de $a(t)$ alors la solution générale de l'équation est : $x(t) = k.e^{A(t)}$ où k est un scalaire (À noter que si A est sous la forme $A(t) = \ln|f(t)|$ alors la valeur absolue disparaît dans la forme finale : $x(t) = k.f(t)$).

Si x_0 est la solution générale de l'équation homogène et x_p est une solution particulière de l'équation complète $x' = a(t)x + b(t)$, alors $x = x_0 + x_p$ est la solution générale de l'équation complète.

Méthode de variation de la constante : On substitue à la constante k une fonction de t, et on écrit : $x(t) = k(t).e^{A(t)}$ ($\Rightarrow$ $x' = (k' + ka).e^{A(t)}$ $\Rightarrow$ $x' - ax = k'.e^{A(t)}$ $\Rightarrow$ $k' = b(t).e^{-A(t)}$) ; il suffit ensuite de trouver une primitive B de $b(t).e^{-A(t)}$, et alors $x_p = B(t).e^{A(t)}$.

8) Résolution d'équations linéaires du second ordre (à coefficients non constant). Méthode de variation d'une constante, méthode spéciale pour les fonctions du type $P(t).e^{rt}$.

Il faut cette fois connaître deux solutions particulières x_1 et x_2 non proportionnelles de l'équation homogène associée, et une solution particulière x_p de l'équation complète $a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x = \phi(t)$ (où $a(t)$ ne s'annule pas). Alors la solution générale de l'équation complète est donnée par : $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + x_p$ où α_1 et α_2 sont des scalaires quelconques (Ce principe s'applique aussi au cas des équations à coefficients constants).

Méthode de variation de la constante : x_1 étant connue, il est parfois possible d'obtenir x_2 ou x_p en posant $x = \alpha(t)x_1$ (il peut parfois être nécessaire d'exprimer $x_p = k(t).(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)$ en choisissant arbitrairement ou non α_1 et α_2) ; il est aussi possible dans certain cas d'obtenir x_p avec un paramètre libre et de lui appliquer la méthode pour obtenir x_1 ou x_2.

Si le second membre est de la forme $P(t).e^{rt}$, et que les coefficients sont eux-mêmes des polynômes, la solution particulière est parfois de la forme $Q(t).e^{rt}$. Dans le cas particulier des coefficients constants c'est toujours le cas ; ainsi, en notant m l'ordre de multiplicité de r dans le polynôme caractéristique de l'équation différentielle, alors : $x_p = t^m Q(t).e^{rt}$ où Q est un polynôme tel que $d°(Q) = d°(P)$. (À noter qu'il est possible dans le cas où il y a présence de fonctions trigonométriques de replacer le problème dans $\mathbb{C}$ en prenant $e^{i\omega t}$ à la place de $\cos(\omega t)$ ou $\sin(\omega t)$).

9) Solutions développables en série entière.

Si les coefficients de l'équation différentielle sont développables en série entière, il est possible de trouver des solutions développables en série entière (à noter qu'on n'obtient pas forcément ainsi toutes les solutions de l'équation). En pratique les coefficients du premier membre seront le plus souvent des polynômes, tandis que seul le second membre correspondra à une série infinie ; il est ainsi possible d'obtenir une relation de récurrence sur les coefficients de la série solution.

10) Équations différentielle non linéaires du premier ordre : À variables séparables, équations incomplètes.

Une équation est à variables séparables si et seulement si elle peut être mise sous la forme d'une équation à variables séparées : $f(x)dx = g(t)dt$; on intègre ensuite directement.

Une équation complète d'inconnue y fonction de x, est de la forme $G(x, y, y') = 0$; elle devient incomplète si x ou y manque (y' est obligatoire si on veut qu'elle soit *différentielle*), c'est-à-dire : $F(x, y') = 0$ ou $F(y, y') = 0$. La méthode consiste ensuite à introduire une variable auxiliaire t et une fonction ϕ définies par une égalité du type : $y' = \phi(t)$.

Alors, en notant : $\dot{x} = dx/dt$ et $\dot{y} = dy/dt$, on arrive finalement à une solution sous forme paramétrée.

11) Courbes intégrales.

Une courbe intégrale (ou trajectoire) d'une équation différentielle est la courbe représentative d'une solution maximale de cette équation différentielle. D'après le théorème d'existence et d'unicité, étant donné un point de coordonnées (t_o, x_o) il passe une et une seule courbe intégrale par ce point. Il est parfois possible de tracer une courbe intégrale sans avoir besoin de résoudre l'équation différentielle.

12) Systèmes de deux équations autonomes, étude des trajectoires.

x et y étant des fonctions inconnues de la variable t, il s'agit d'un système duquel la variable t est absente : $\{x' = \phi(x, y), \ y' = \psi(x, y)\}$; le système reste donc valide en remplaçant t par $t + k$ (k scalaire). Il y a de nombreux procédés de résolution selon la nature des équations ; par exemple : On peut parfois poser $z = x + iy$, on peut parfois résoudre directement une équation du premier ordre $dy/dx = \psi/\phi$, on peut parfois poser $v = (x, y)$ et $v' = f(v)$, etc... (la démarche à suivre peut aussi être indiquée dans les énoncés).

Une trajectoire est ici une solution obtenue sous forme paramétrée $(x(t), y(t))$. Il est parfois possible de tracer une trajectoire sans résoudre le système ; par exemple, l'étude de $T = y/x$ permet d'obtenir des renseignements sur les branches infinies.

13) Approximation de trajectoires par la méthode d'Euler.

Soit (x_0, y_0) un point initial donné de la courbe d'une solution y de l'équation différentielle : $y' = F(x, y)$. Alors pour h un pas fixé assez petit, on pose : $x_1 = x_0 + h$, $y_1 = y_0 + h.F(x_0, y_0)$, $x_2 = x_1 + h$, $y_2 = y_1 + h.F(x_1, y_1)$, etc...

14) Exemples d'équations aux dérivées partielles : Intégration directe, équations linéaires du premier ordre à deux variables, etc...

Intégration directe : Il s'agit de systèmes d'équations aux dérivées partielles dans lesquels on peut intégrer directement selon les variables de dérivation.

Équation linéaire du premier ordre : $a.\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + b.\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = c$ (où a, b, c sont des réels, a et b sont non nuls sinon on est dans le cas de l'intégration directe). Alors, en posant $z = f(x, y)$: (a, b, c) et (dx, dy, dz) sont colinéaires (en assimilant le second à un vecteur). La solution cherchée est alors : $z = (F(bx - ay) + cx)/a$, où F est une fonction réelle dérivable quelconque.

Cette méthode peut s'étendre au cas où a, b et c ne sont plus des constantes.

Équation de Laplace : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0$. Les fonctions vérifiant cette équation sont dites *harmoniques*.

Etc...