

## L) Fiche : Courbes.

$\mathcal{E}$  désigne selon les cas le plan ou l'espace affine euclidien (orienté), muni d'un repère orthonormé (direct).

1) Courbes : vitesse, accélération, point stationnaire, point régulier, point birégulier, point double ou plus.

$f$  étant une fonction d'un intervalle réel  $I$  dans  $\mathcal{E}$ , si  $f$  est dérivable en  $t$  paramètre d'un point  $M$ , la dérivée  $\vec{V}$  de  $f$  en  $t$  est appelée *vecteur vitesse* ; et si  $f$  est deux fois dérivable en  $t$ , la dérivée seconde  $\vec{\Gamma}$  de  $f$  en  $t$  est appelée *vecteur accélération*.

Dans le plan :  $f(t) = (x(t), y(t))$  ;  $\vec{V}(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$  ;  $\vec{\Gamma}(t) = \begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix}$ .

(Dans l'espace on ajoute une troisième coordonnée  $z(t)$ ).

Un point en lequel le vecteur vitesse est non nul est un point *régulier* ; un point en lequel le vecteur vitesse est nul est un point *stationnaire*. Un point en lequel le vecteur vitesse et le vecteur accélération sont linéairement indépendants est *birégulier*.

Si  $f$  n'est pas injective, un point qui admet plusieurs antécédents dans  $I$  est un point multiple (**point double** s'il y a deux antécédents, point triple s'il y en a trois, etc...)

2) Vecteur tangent à une courbe en un point.

Quelle que soit la dimension de l'espace, le premier vecteur dérivé non nul en un point est tangent à la courbe en ce point ; pour un point régulier c'est le vecteur vitesse.

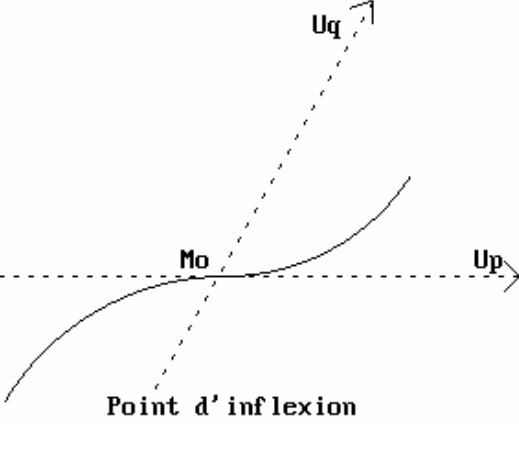
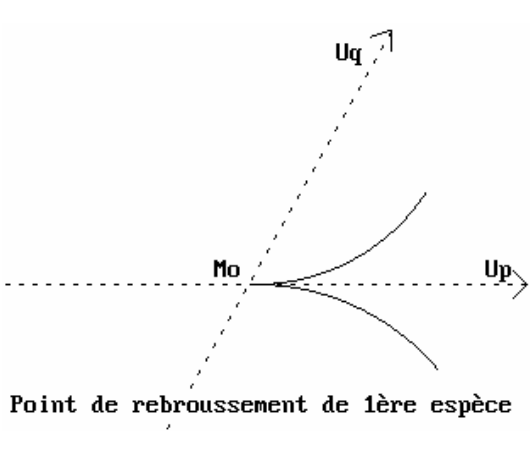
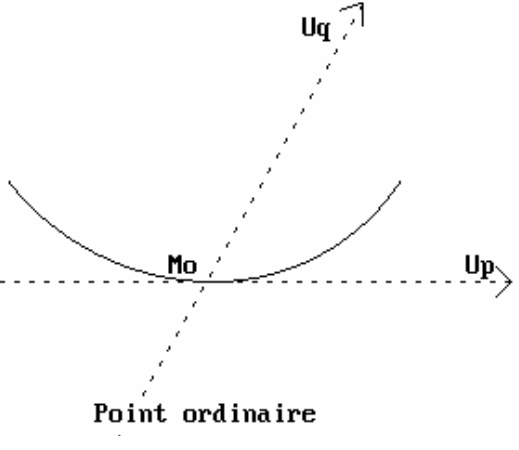
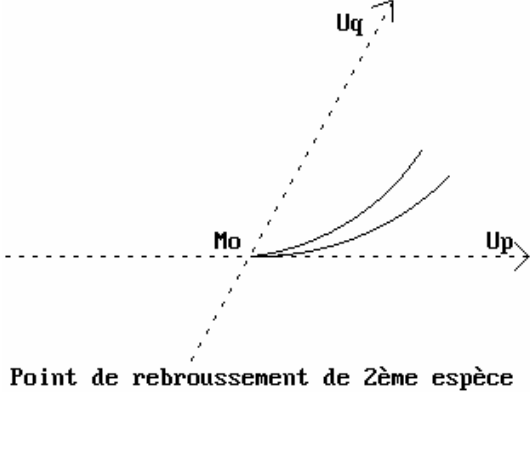
3) Courbes planes paramétrées. Étude locale par la formule de Taylor.

**Formule de Taylor** ( $f$  est supposée au moins  $q$  fois dérivable en  $t_0$ ) : Soit  $p$  et  $q$  les deux premiers ordres de dérivation pour lesquels  $u_p = f^{(p)}(t_0)$  et  $u_q = f^{(q)}(t_0)$  sont linéairement indépendants (en supposant qu'ils existent). Alors : (Le premier  $o()$  concerne les dérivées d'ordres compris entre  $p + 1$  et  $q - 1$ ).

Dans le plan : 
$$M(t) = M(t_0) + \frac{(t - t_0)^p}{p!}(1 + o(1)).u_p + \frac{(t - t_0)^q}{q!}(1 + o(1)).u_q.$$

*Conséquence :*

	$p$ impair	$p$ pair
--	------------	----------

q impair	 <p style="text-align: center;">Point d'inflexion</p>	 <p style="text-align: center;">Point de rebroussement de 1ère espèce</p>
q pair	 <p style="text-align: center;">Point ordinaire</p>	 <p style="text-align: center;">Point de rebroussement de 2ème espèce</p>

Utilisation du déterminant du vecteur vitesse et du vecteur accélération :

Soit  $W = \det(\vec{V}, \vec{\Gamma})$  ; si  $W$  est nul au paramètre d'un point, alors ce point n'est pas birégulier (c'est même une équivalence). Cette règle permet parfois de trouver les points d'inflexion que le graphe laisse apparaître.

#### 4) Branches infinies.

Il y a « branche infinie » lorsque  $\|f(t)\|$  tend vers  $+\infty$  quand  $t$  tend vers une valeur finie ou non.

Cas particulier du plan : Soit  $\alpha$  un réel ou bien  $\pm\infty$ .

1.  $\lim_{t \rightarrow \alpha} x(t) = x_0$  et  $\lim_{t \rightarrow \alpha} y(t) = \pm\infty \rightarrow$  asymptote :  $(x = x_0)$ .
2.  $\lim_{t \rightarrow \alpha} x(t) = \pm\infty$  et  $\lim_{t \rightarrow \alpha} y(t) = y_0 \rightarrow$  asymptote :  $(y = y_0)$ .
3.  $\lim_{t \rightarrow \alpha} x(t) = \pm\infty$  et  $\lim_{t \rightarrow \alpha} y(t) = \pm\infty \rightarrow$  il faut calculer la limite de  $y/x$ .
- 3.1.  $\lim_{t \rightarrow \alpha} y/x = 0 \rightarrow$  B.P. Ox.

$$3.2. \lim_{t \rightarrow \alpha} y/x = \pm\infty \rightarrow \text{B.P. Oy.}$$

$$3.3. \lim_{t \rightarrow \alpha} y/x = a \text{ réel non nul} \rightarrow \text{il faut calculer la limite de } y - ax.$$

$$3.3.1. \lim_{t \rightarrow \alpha} (y - ax) = \pm\infty \rightarrow \text{B.P. (} y = ax \text{).}$$

$$3.3.2. \lim_{t \rightarrow \alpha} (y - ax) = b \text{ un réel} \rightarrow \text{asymptote : (} y = ax + b \text{).}$$

Dans certains cas de branches paraboliques il pourra être judicieux de montrer qu'il existe une parabole asymptote. Si  $(y = ax^2 + bx + c)$  est l'équation de cette parabole il faut alors que l'on ait :

$$\lim_{t \rightarrow \alpha} (y(t) - (ax(t)^2 + bx(t) + c)) = 0.$$

(On adapte cette formule si la parabole est d'équation  $x = ay^2 + by + c$ , etc...)

#### 5) Courbes en coordonnées cartésiennes.

L'équation de la tangente à la courbe d'équation  $(F(x, y) = 0)$  au point  $M_0(x_0, y_0)$  est donnée par :

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) = 0.$$

Il s'en suit que le vecteur  $\text{grad}_F[M_0]$  est normal à la courbe en  $M_0$ .

- *Remarque* : Les courbes d'équations respectives  $(y = f(x))$  ou  $(x = g(y))$  s'étudient directement, mais on peut aussi leur appliquer les mêmes règles que les courbes paramétrées en écrivant respectivement  $\{x = t, y = f(t)\}$  ou  $\{x = g(t), y = t\}$ .

#### 6) Courbes en coordonnées polaires. Équations polaires des coniques.

Soit  $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ . Alors :

$$\boxed{\begin{pmatrix} x(\theta) \\ y(\theta) \end{pmatrix} = R(\theta) \begin{pmatrix} \rho \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x'(\theta) \\ y'(\theta) \end{pmatrix} = R(\theta) \begin{pmatrix} \rho' \\ \rho \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x''(\theta) \\ y''(\theta) \end{pmatrix} = R(\theta) \begin{pmatrix} \rho'' - \rho \\ 2\rho' \end{pmatrix}}.$$

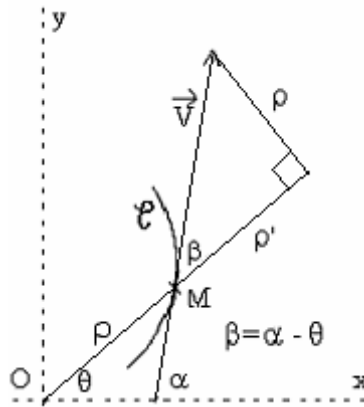
Si  $\rho < 0$  on écrit :  $\rho \cdot \cos(\theta) = -\rho \cdot \cos(\theta + \pi)$ ,  $\rho \cdot \sin(\theta) = -\rho \cdot \sin(\theta + \pi)$ .

- *Remarque* :

$$x'^2 + y'^2 = \rho'^2 + \rho^2, \quad x''^2 + y''^2 = (\rho'' - \rho)^2 + 4\rho'^2, \quad W = x'y'' - y'x'' = \rho^2 - \rho\rho'' + 2\rho'^2.$$

Tangente en un point : Si  $\alpha$  est l'angle polaire en un point régulier de  $\vec{V}$  et que  $\rho'$  ne

s'annule pas alors :  $\boxed{\frac{\rho}{\rho'} = \tan(\alpha - \theta)}$ .



### Branches infinies :

Si  $\lim_{\theta \rightarrow \pm\infty} \rho = a$  réel, alors  $\mathcal{C}(O, a)$  est un cercle asymptote.

Si  $\lim_{\theta \rightarrow \alpha} \rho = \pm\infty$  et si  $\alpha \neq \pi/2 + k\pi$  il faut calculer la limite de  $y - x \cdot \tan(\alpha)$ .  
(Si  $\alpha = \pi/2 + k\pi$  il faut juste calculer la limite de  $x$ ).

Équation polaire d'une conique de foyer  $O$  :  $\rho = \frac{p}{1 + e \cdot \cos(\theta)}$ ;  $p$  est le *paramètre* de la conique et  $e$  son *excentricité*, où  $e > 0$ .

- *Remarque* : Si  $e < 0$  on applique la transformation  $\rho \cdot \cos(\theta) = -\rho \cdot \cos(\theta + \pi)$ . Il est aussi possible d'avoir une conique *incliné* avec la formule  $\rho = p / (1 + e \cdot \cos(\theta + \alpha))$ .

### 7) Rectification.

La longueur d'un arc de courbe rectifiable ( $t \mapsto f(t)$ ) du plan entre les deux valeurs  $a$  et  $b$  du paramètre est :

$$L = \int_a^b \|\vec{V}(t)\| dt \quad (\text{où } \vec{V} \text{ désigne le vecteur vitesse}).$$

Étant donné un point  $M_0$  tenant lieu d'origine correspondant à la valeur  $a$  du paramètre, on appelle **abscisse curviligne** d'origine  $M_0$  la fonction définie sur  $[a, b]$  par :

$$s(t) = \int_a^t \|\vec{V}(\tau)\| d\tau.$$

Alors :  $\frac{df}{ds}$  est le vecteur unitaire tangent, qui a pour composantes  $(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$ , où  $\alpha$  est l'angle polaire du vecteur vitesse (donc de la tangente).

En outre :  $ds^2 = dx^2 + dy^2 = \rho^2 d\theta^2 + d\rho^2$ .

- *Remarque* : La plupart de ces formules s'adaptent à la dimension 3 en introduisant la variable  $z$ , ce qui dans le cas des coordonnées polaires revient à prendre des coordonnées cylindriques.