

M) Fiche : Surfaces.

\mathcal{E} désigne selon les cas le plan ou l'espace affine euclidien (orienté), muni d'un repère orthonormé (direct).

1) Plan tangent.

En un point M_0 d'une surface $\mathcal{S}: (F(x, y, z) = 0)$ (F différentiable) le plan tangent admet pour équation cartésienne :

$$\frac{\partial F}{\partial x}(M_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(M_0) \cdot (y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(M_0) \cdot (z - z_0) = 0.$$

Le vecteur $\text{grad}_F[M_0]$ est alors normal à la surface en M_0 , et toutes les droites contenues dans le plan sont tangentes à la surface en ce point.

Si la surface est paramétrée et $M_0: (x(\lambda_0, \mu_0), y(\lambda_0, \mu_0), z(\lambda_0, \mu_0))$, et que x , y et z sont différentiables en ce point alors le plan tangent est :

$$M_0 + \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \lambda}(\lambda_0, \mu_0) \\ \frac{\partial y}{\partial \lambda}(\lambda_0, \mu_0) \\ \frac{\partial z}{\partial \lambda}(\lambda_0, \mu_0) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \mu}(\lambda_0, \mu_0) \\ \frac{\partial y}{\partial \mu}(\lambda_0, \mu_0) \\ \frac{\partial z}{\partial \mu}(\lambda_0, \mu_0) \end{pmatrix} \right).$$

- *Remarque* : Le plan tangent en un point à un cylindre ou un cône contient la génératrice passant par ce point.

2) Courbe intersection de deux surfaces.

Soit $\mathcal{C} = \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$, et A un point régulier de \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 tel que les plans \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 respectivement tangents à \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 en A soient distincts. Alors A est un point régulier de \mathcal{C} admettant pour tangente la droite définie par $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$.

- *Remarque* : Pour que \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 soient distincts, il suffit que les vecteurs $\text{grad}_F[A]$ et $\text{grad}_G[A]$ ne soient pas colinéaires (où F et G sont les fonctions définissant les représentations cartésiennes respectives des deux surfaces : $\mathcal{S}_1: (F(x, y, z) = 0)$ et $\mathcal{S}_2: (G(x, y, z) = 0)$).

3) Cylindre ou cône circonscrit et contour apparent cylindrique ou conique.

Le cylindre \mathcal{C} réunion des droites de direction u (non nul) et tangentes à \mathcal{F} est le **cylindre circonscrit** à \mathcal{F} dans la direction u .

La courbe de contact, intersection entre \mathcal{F} et \mathcal{C} est le **contour apparent cylindrique** de \mathcal{F} dans la direction u .

Le cône \mathcal{C} réunion des tangentes à \mathcal{F} issues d'un point Ω *extérieure* à \mathcal{F} est appelé le **cône circonscrit** à \mathcal{F} de sommet Ω .

La courbe de contact, intersection entre \mathcal{F} et \mathcal{C} est le **contour apparent conique** de \mathcal{F} de sommet Ω .

4) Surface de révolution.

Une surface de révolution d'axe Δ est une **surface** réunion d'une famille de cercles d'axe Δ (contenus dans un plan orthogonal à Δ et ayant leur centre sur Δ).

Un plan contenant l'axe est un plan méridien et l'intersection d'un plan méridien avec la surface est une *méridienne*.

Une méridienne est formée de deux courbes appelées demi-méridiennes, symétriques par rapport à l'axe.

La surface de révolution peut donc être considérée comme le résultat de la rotation d'une demi-méridienne (ou d'une méridienne) autour de l'axe.

La section droite (orthogonale à l'axe) d'une surface de révolution est un cercle aussi appelée : ***parallèle***.

Une surface de révolution d'axe (Ox) admet une équation cartésienne de la forme :

$$F(x, y^2 + z^2) = 0.$$

Si la demi-méridienne est une courbe d'équation $(y = f(x))$ pour $a \leq x \leq b$ alors le volume vaut :

$$V = \pi \cdot \int_a^b f(x)^2 dx.$$

5) Aires et intégrales doubles.

Une surface \mathcal{F} du plan doit être donnée sous forme *hiérarchisée*, par exemple :

$$a \leq x \leq b \text{ et } f(x) \leq y \leq g(x).$$

Son aire vaut alors : $\iint_{\mathcal{F}} dx dy$.

Plus généralement l'intégrale double d'une fonction de deux variables $F(x, y)$ se calcule aussi grâce à la donnée hiérarchisée de \mathcal{F} :

$$\iint_{\mathcal{F}} F(x, y) dx dy.$$

Changement de système de coordonnées (**cartésiennes** \rightarrow **polaires**) :

$$\iint_{\mathcal{F}} F(x, y) dx dy = \iint_{\Delta} F(\rho \cdot \cos(\theta), \rho \cdot \sin(\theta)) \rho d\rho d\theta.$$

$$\text{où } (x, y) \in \mathcal{F} \Leftrightarrow [\rho, \theta] \in \Delta.$$

6) Volumes et intégrales triples.

Un volume \mathcal{V} doit être donné sous forme *hiérarchisée*, par exemple :

$$a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x) \text{ et } \phi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y).$$

Son volume vaut alors : $\iiint_{\mathcal{V}} dx dy dz$.

Plus généralement l'intégrale triple d'une fonction de trois variables $F(x, y, z)$ se calcule aussi grâce à la donnée hiérarchisée de \mathcal{V} :

$$\iiint_{\mathcal{V}} F(x, y, z) dx dy dz.$$

Changement de système de coordonnées :

Cartésiennes \rightarrow **cylindriques** :

$$\iiint_{\mathcal{V}} F(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Delta} F(r \cdot \cos(\theta), r \cdot \sin(\theta), z) \cdot r dr d\theta dz.$$

$$\text{où } (x, y, z) \in \mathcal{V} \Leftrightarrow ([r, \theta], z) \in \Delta.$$

Cartésiennes \rightarrow **sphériques** : $\iiint_{\mathcal{V}} F(x, y, z) dx dy dz =$

$$\iiint_{\sigma} F(\rho \cdot \cos(\theta) \sin(\varphi), \rho \cdot \sin(\theta) \sin(\varphi), \rho \cdot \cos(\varphi)) \cdot \sin(\varphi) \rho^2 d\rho d\theta d\varphi.$$

où $(x, y, z) \in \mathcal{V} \Leftrightarrow [\rho, \theta, \varphi] \in \sigma$. (Attention, l'intervalle usuel de φ est $[0, \pi]$).

7) Centre d'inertie.

Soit G le centre d'inertie une plaque homogène \mathcal{F} d'aire S :

$$\begin{pmatrix} x_G \\ y_G \end{pmatrix} = \frac{1}{S} \cdot \iint_{\mathcal{F}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} dx dy.$$

Soit G le centre d'inertie d'une plaque \mathcal{F} de fonction de densité $\mu(x, y)$ (densité surfacique) et de masse M :

$$M = \iint_{\mathcal{F}} \mu(x, y) dx dy \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \end{pmatrix} = \frac{1}{M} \cdot \iint_{\mathcal{F}} \mu(x, y) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} dx dy.$$

Soit G le centre d'inertie d'un solide homogène \mathcal{V} de volume V :

$$\begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ z_G \end{pmatrix} = \frac{1}{V} \cdot \iiint_{\mathcal{V}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} dx dy dz.$$

Soit G le centre d'inertie d'un solide \mathcal{V} de fonction de densité $\mu(x, y, z)$ (masse volumique) et de masse M :

$$M = \iiint_{\mathcal{V}} \mu(x, y, z) dx dy dz \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ z_G \end{pmatrix} = \frac{1}{M} \cdot \iiint_{\mathcal{V}} \mu(x, y, z) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} dx dy dz.$$

8) Moment d'inertie.

Soit U désignant un point, une droite ou un plan (sous-espace affine). Le moment d'inertie J d'une plaque \mathcal{F} ou d'un solide \mathcal{V} relativement à U vaut respectivement :

$$J = \iint_{\mathcal{F}} \mu(x, y) \cdot d((x, y), U)^2 dx dy \quad \text{ou} \quad \iiint_{\mathcal{V}} \mu(x, y, z) \cdot d((x, y, z), U)^2 dx dy dz$$

- *Remarque* : Si la plaque ou le solide est homogène, la fonction μ est constante (d'un point de vue physique le moment d'inertie dépend de la densité de la plaque ou du solide).