TD26 : EM3 – Mvt de charge dans un champ $\left(\vec{E},\vec{B}\right)$ – CORRIGE

Exercice 1 : Oscilloscope – Accélération et Déflexion électrostatique

1. Accélération

1.a) PFD : $\boxed{m\vec{a} = \cancel{m\vec{g}} + q\vec{E}}$ avec $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V) = \dfrac{-dV}{dx}\vec{e}_x = \dfrac{-V_1}{d}\vec{e}_x$

1.b). Force de gravitation négligeable : $\left\|m\vec{g}\right\| \approx 9{,}1.10^{-30}\,N \ll \left\|q\vec{E}\right\| = 1{,}6.10^{-16}\,N$

1.c) Trajectoire : $m\vec{a} = \dfrac{-qV_1}{d}\vec{e}_x \Rightarrow \begin{cases}\ddot{x} = \dfrac{eV_1}{md}\\ \ddot{y} = 0\end{cases}$ $\boxed{\Rightarrow x_{(t)} = \dfrac{eV_1}{2md}t^2} + \cancel{\dot{x}_{(0)}}t + \cancel{x_{(0)}}$

1.d) A l'anode : x = d, donc $t = \sqrt{\dfrac{2md^2}{eV_1}}$ $\boxed{\Rightarrow v_1 = \dfrac{eV_1}{md}t = \sqrt{\dfrac{2eV_1}{m}} = 5{,}92.10^6\,m.s^{-1}}$

1.e) Méthode énergétique : $\boxed{\Delta E_C = \dfrac{1}{2}mv_1^2 = -\Delta E_P = eV_1}$ $\Rightarrow v_1 = \sqrt{\dfrac{2eV_1}{m}} = 5{,}9.10^6\,m.s^{-1}$

2. Déflexion électrostatique

2.a) PFD : $\boxed{m\vec{a} = \cancel{m\vec{g}} + q\vec{E}}$ avec $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V) = \dfrac{-dV}{dx}\vec{e}_y = \dfrac{-U}{d}\vec{e}_y$

Cela donne : $\begin{cases}\ddot{x} = 0\\ \ddot{y} = \dfrac{eU}{md}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dot{x}_{(t)} = \dot{x}_{(0)} = v_1\\ \dot{y}_{(t)} = \dfrac{eU}{md}t + \cancel{\dot{y}_{(0)}}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_{(t)} = v_1 t + \cancel{x_{(0)}}\\ y_{(t)} = \dfrac{eU}{2md}t^2 + \cancel{y_{(0)}}\end{cases}$

Et en sortie : $y_S = \dfrac{eU}{2md}t_S^2 = \dfrac{eU}{2md}\left(\dfrac{l}{v_1}\right)^2 = \boxed{y_S = \dfrac{l^2U}{4dV_1} = 2mm}$ et $\boxed{\tau = \dfrac{l}{v_1} = 3{,}4.10^{-8}\,s}$

2.b) Valeurs numériques : Très rapide / Faible déviation, il faudra amplifier la tension…

2.c) On met une tension sinus, T = 20ms → L'affichage suit sans rémanence sur l'écran

Exercice 2 : Déflexion magnétostatique (TV / Spectromètre de masse)

1. Mouvement circulaire uniforme

1.a) PFD : $m\vec{a} = (-e)\vec{v}\wedge\vec{B} \Rightarrow \vec{a} = \omega\vec{e}_y\wedge\vec{v} \Rightarrow \begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\\ \ddot{z}\end{pmatrix} = \omega\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{pmatrix} = \omega\begin{pmatrix}\dot{z}\\ 0\\ -\dot{x}\end{pmatrix}$

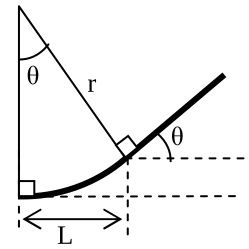
Ainsi : y = cstte et le mouvement est plan

$\begin{cases}\ddot{x} = \omega\dot{z}\\ \ddot{z} = -\omega\dot{x}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dot{x}_{(t)} - \cancel{\dot{x}_{(0)}} = \omega z_{(t)} - \cancel{\omega z_{(0)}}\\ \ddot{z}_{(t)} + \omega^2 z_{(t)} = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dot{x}_{(t)} = \omega z_{(t)}\\ z = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)\end{cases}$

On résout l'équation diff : $\begin{cases}z(0) = 0 = a\\ \dot{z}(0) = v_0 = b\omega\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}z(t) = \dfrac{v_0}{\omega}\sin(\omega t)\\ \dot{x} = \omega z = v_0\sin(\omega t)\end{cases}$

On intègre la 2ème équation différentielle : $\begin{cases}x(0) = 0\\ \dot{x}(0) = 0\end{cases}$ $\boxed{\Rightarrow \begin{cases}z(t) = \dfrac{v_0}{\omega}\sin(\omega t)\\ x(t) = \dfrac{v_0}{\omega}\left(1-\cos(\omega t)\right)\end{cases}}$

1.b) Mouvement circulaire : $\boxed{\left(x - \dfrac{v_0}{\omega}\right)^2 + z^2 = \left(\dfrac{v_0}{\omega}\right)^2}$ → Equation d'un cercle de centre $C\left(\dfrac{v_0}{\omega},0,0\right)$ et de rayon $\boxed{r = \dfrac{v_0}{\omega} = \dfrac{mv_0}{eB} = 1{,}9cm}$

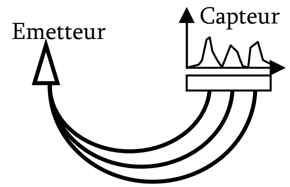


2. Déflexion magnétique :

L'électron sort en étant tangent à au cercle :

$\sin(\Delta\theta) = \dfrac{L}{r}$ $\boxed{\Rightarrow \Delta\theta = Arc\sin\left(\dfrac{L}{r}\right) = 32°}$

3. Spectromètre de masse :



Le rayon de la trajectoire $r = \dfrac{mv_0}{eB}$ dépend directement de la masse de la particule ainsi que de sa charge. On peut séparer par exemple deux isotopes (Nombre de masse A différent = nb de nucléons) de même charge.

Exercice 3 : Conducteur ohmique (oscilloscope)

1. PFD : $\boxed{\dfrac{d\vec{v}}{dt} + \dfrac{\vec{v}}{\tau} = -\dfrac{e}{m}\vec{E}}$ 3. Solution générale : $\boxed{\vec{v} = \vec{v}_0\cdot e^{-t/\tau} - \dfrac{e\tau}{m}\cdot\vec{E}}$

Temps de relaxation : temps mis pour revenir à un état stable après une excitation

4. Densité particulaire $n = \dfrac{10{,}5\,kg.L^{-1}\cdot N_A\,e^-.mol^{-1}}{0{,}108\,kg.mol^{-1}} = 5{,}85.10^{25}\,e^-.L^{-1} = \boxed{5{,}85.10^{28}\,e^-.m^{-3}}$

5. Densité de courant : $\boxed{\vec{j} = nq\vec{v} = -ne\vec{v} = \dfrac{ne^2\tau}{m}\cdot\vec{E} = \sigma\cdot\vec{E}}$

6. On a $R = \rho\dfrac{l}{S} = \dfrac{l}{\sigma S}$ $\boxed{\Rightarrow \sigma = \dfrac{l}{SR} = 6{,}2.10^7\,\Omega^{-1}.m^{-1}}$ ou encore $\rho = 1{,}61.10^{-8}\,\Omega.m$

7. Tps de relaxation : $\sigma = \dfrac{ne^2\tau}{m} = 6{,}2.10^7\,\Omega^{-1}.m^{-1}$ $\boxed{\Rightarrow \tau = \dfrac{\sigma m}{ne^2} = \dfrac{6{,}2.10^7\times 9{,}1.10^{-31}}{5{,}85.10^{28}\times\left(1{,}6.10^{-19}\right)^2} = 3{,}76.10^{-14}\,s}$

8. Si I = 10A, alors $I = \left\|\vec{j}\right\|\cdot S = ne\left\|\vec{v}\right\|\cdot S = 10A$ $\boxed{\left\|\vec{v}\right\| = \dfrac{I}{neS} = 0{,}3\,mm.s^{-1}}$

Loin devant la vitesse individuelle des porteurs, de l'ordre de $10^5\,m.s^{-1}$.

Exercice 4 : Cyclotron

1. Excitation du cyclotron ? Dans l'exercice 3, on a introduit la pulsation $\omega = eB/m$

→ Trajectoire = cercle de rayon : $R_n = \frac{v_n}{\omega} = \frac{mv_n}{qB}$

→ Période de rotation : $T_n = \frac{2\pi R_n}{v_n} = \frac{2\pi}{v_n}\cdot\frac{mv_n}{qB} = \frac{2\pi m}{qB}$ indépendant de v…

Et la fréquence nécessaire : $\boxed{f = \frac{1}{T_n} = \frac{qB}{2\pi m} = 1{,}52.10^7\ Hz}$

2. Rayon des cercles : On a $\boxed{R_n = \frac{v_n}{\omega} = \frac{mv_n}{qB}}$

Et à chaque accélération : $\begin{cases} \frac{1}{2}mv_2^{\,2} - \frac{1}{2}mv_1^{\,2} = qU_m \\ \text{.........} \\ \frac{1}{2}mv_n^{\,2} - \frac{1}{2}mv_{n-1}^{\,2} = qU_m \end{cases}$ $\Rightarrow \frac{1}{2}mv_n^{\,2} - \frac{1}{2}mv_1^{\,2} = (n-1)qU_m$

D'où $v_n = \sqrt{\frac{2(n-1)qU_m}{m} + v_1^2}$ et $\boxed{R_n = \frac{mv_n}{qB} = \frac{m}{qB}\sqrt{\frac{2(n-1)qU_m}{m} + v_1^2} = \sqrt{R_1^2 + \frac{2(n-1)mU_m}{qB^2}}}$

3. Injection de protons :

3.a) Vitesse max pour $R_n = D$: $\boxed{v_{\max} = \frac{qBD}{m} = 3.10^7\ m.s^{-1}}$

Energie cinétique $\boxed{E_{C,\max} = \frac{1}{2}mv_{\max}^{\ 2} = 7{,}5.10^{-13}\ J = 4{,}7\ MeV}$

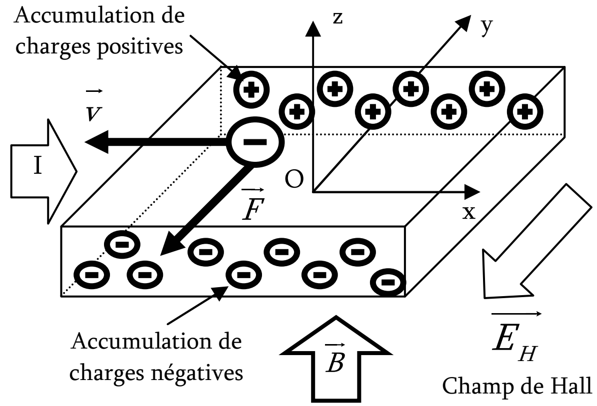
Rappel sur l'électron volt : Energie gagné par un électron lorsqu'il est accéléré dans un champ électrique de 1V → adapté à l'échelle de l'e⁻ $1eV = \Delta E_P = e\cdot U = 1{,}6.10^{-19}\ J$

3.b) Nb de tours : avec l'expression de Rn : $R_n = D = \sqrt{R_1^2 + \frac{2(n-1)mU_m}{qB^2}}$

Donc : $\boxed{N = \frac{n}{2} = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{qB^2}{2mU_m}\left(\left(\frac{D}{2}\right)^2 - R_1^2\right)\right] = 117\ tours}$

3.c) Temps de transit : $\boxed{\Delta t = NT = 7{,}7.10^{-6}\ s}$ (demi-période indépendante du rayon)

Exercice 5 : Effet Hall



1. Champ électrique de Hall : $\overrightarrow{E_H}$

1.a) On a $\boxed{\vec{J} = nq\cdot\vec{v} = -ne\cdot\vec{v}}$

1.b) On représente la vitesse des électrons, et la force de Lorentz

1.c) $\vec{J} \parallel (Ox)$, mais $\vec{B}$ dévie les charges avec la force de Lorentz $\overrightarrow{F_{ext}} = q\vec{v}\wedge\vec{B}$. Il faut donc un champ électrique de Hall crée par les accumulations de charges sur les faces 1 et 2, exerçant une force opposée à cette force de Lorentz du champ extérieur : $\overrightarrow{F_{Hall}} = -q\vec{v}\wedge\vec{B} = q\overrightarrow{E_H}$ pour garder une trajectoire du courant selon (Ox).

Ainsi : $\boxed{\overrightarrow{E_H} = -\vec{v}\wedge\vec{B} = \frac{1}{ne}\vec{J}\wedge\vec{B}}$

1.d) Composantes : $\overrightarrow{E_H} = \frac{1}{ne}\begin{bmatrix} J \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{bmatrix} = \frac{1}{ne}\begin{bmatrix} 0 \\ -JB \\ 0 \end{bmatrix}$ $\boxed{\Rightarrow \overrightarrow{E_H} = \frac{-JB}{ne}\cdot\overrightarrow{e_y}}$

2. Tension de Hall et mesure du champ :

2.a) Tension de Hall : $U_H = V_N - V_M = \int_M^N dV = \int_M^N -E_H\cdot dy = |E_H|\cdot b = \boxed{U_H = \frac{JB}{ne}\cdot b}$

2.b) Ainsi, $U_H = \frac{JB}{ne}\cdot b = \frac{IB\times b}{(b\times h)\times ne} = \boxed{U_H = \frac{C_H}{h}\cdot I\cdot B \quad avec \quad C_H = \frac{1}{ne}}$

Utilité ? → On peut obtenir la valeur du champ magnétique B par une mesure de tension, il s'agit d'un capteur très simple pour le champ magnétique.

2.c) AN : $\boxed{B = \frac{h\cdot U_H}{C_H\cdot I} = \frac{0{,}3.10^{-3}\cdot 0{,}125}{375.10^{-6}\cdot 0{,}1} = 704\ mT}$ et $\boxed{n = \frac{1}{e\cdot C_H} = 1{,}66.10^{22}\quad e^-.\mathrm{m}^{-3}}$