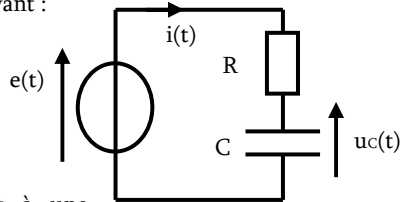


Cadre de la Méthode Complexe

Exercice 1 : Circuit RC en Sinus Forcé

Soit le circuit RC série suivant :



1. Etude temporelle en régime continu :

On soumet le circuit à une source de tension E constante

- 1.1. Etablir l'équation différentielle vérifiée par $u_C(t)$
- 1.2. Résoudre l'équation dans le cas où $u_C(0^+) = 0$ et $e(t) = E$
- 1.3. A quoi correspond la solution SSM de l'équation ?
- 1.4. A quoi correspond la solution PART de l'équation ?
- 1.5. Faire de même pour $u_C(0^+) = E$ et $e(t) = 0$. Commenter.

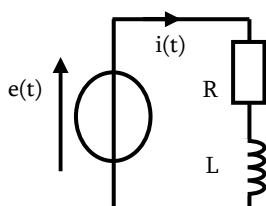
2. Etude temporelle en sinus forcé

L'équation vérifiée par $u_C(t)$ est inchangée, mais c'est l'excitation $e(t)$ qui est maintenant sinusoïdale $e(t) = E \cos(\omega t)$

- 2.1. Est-il simple de résoudre directement l'équation ? Essayez de la résoudre...
- 2.2. On utilise pour simplifier la méthode complexe. Préciser dans quel contexte on peut utiliser cette méthode.
- 2.3. Première méthode pour obtenir l'équation complexe vérifiée par $u_C(t)$: Rappeler l'équation différentielle temporelle vérifiée par $u_C(t)$, puis passer cette équation en complexe.
- 2.4. Seconde méthode pour obtenir l'équation complexe : Trouver directement l'équation à partir des impédances complexes des R, L et C.
- 2.5. Résoudre cette équation complexe. A quoi correspond cette solution ?
- 2.6. Redonner la solution temporelle (expression de $u_C(t)$) correspondant à cette solution complexe.
- 2.7. Y-a-t-il encore un régime transitoire ? Et un régime permanent ?
- 2.8. Est-il en général utile de connaître le régime transitoire ?

Exercice 2 : Circuit RL en Sinus Forcé

On fait exactement le même travail avec un circuit RL série :



1. Etude temporelle en régime continu :

On soumet le circuit à une source de tension E constante

- 1.1. Etablir l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$
- 1.2. Résoudre l'équation dans le cas où $i(0^+) = 0$ et $e(t) = E$

- 1.3. A quoi correspond la solution SSM de l'équation ?
- 1.4. A quoi correspond la solution PART de l'équation ?
- 1.5. Faire de même pour $i(0^+) = E/R$ et $e(t) = 0$. Commenter.

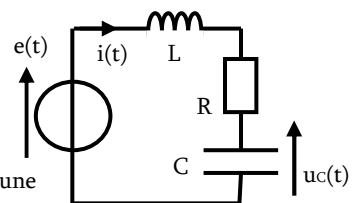
2. Etude temporelle en sinus forcé

L'équation vérifiée par $u_C(t)$ est inchangée, mais c'est l'excitation $e(t)$ qui est maintenant sinusoïdale $e(t) = E \cos(\omega t)$

- 2.1. Est-il simple de résoudre directement l'équation ? Essayez de la résoudre...
- 2.2. On utilise pour simplifier la méthode complexe. Préciser dans quel contexte on peut utiliser cette méthode.
- 2.3. Première méthode pour obtenir l'équation complexe vérifiée par $u_C(t)$: Rappeler l'équation différentielle temporelle vérifiée par $u_C(t)$, puis passer cette équation en complexe.
- 2.4. Seconde méthode pour obtenir l'équation complexe : Trouver directement l'équation à partir des impédances complexes des R, L et C.
- 2.5. Résoudre cette équation complexe. A quoi correspond cette solution ?
- 2.6. Redonner la solution temporelle (expression de $u_C(t)$) correspondant à cette solution complexe.
- 2.7. Y-a-t-il encore un régime transitoire ? Et un régime permanent ?
- 2.8. Est-il en général utile de connaître le régime transitoire ?

Exercice 3 : Circuit RLC en Sinus Forcé

On fait exactement le même travail avec un circuit RLC série :



1. Etude temporelle en régime continu :

On soumet le circuit à une source de tension E constante

- 1.1. Etablir l'équation différentielle vérifiée par $u_C(t)$
- 1.2. Résoudre l'équation dans le cas où $u_C(0^+) = 0$ et $e(t) = E$, à quoi correspondent les solutions SSM et PART ?
- 1.3. Faire de même pour $u_C(0^+) = E$ et $e(t) = 0$. Commenter.

2. Etude temporelle en sinus forcé

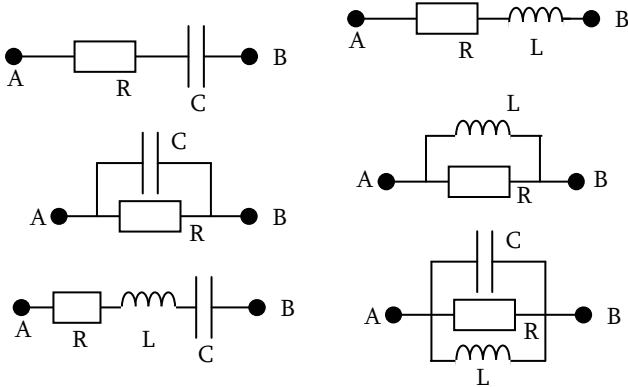
L'équation vérifiée par $u_C(t)$ est inchangée, mais c'est l'excitation $e(t)$ qui est maintenant sinusoïdale $e(t) = E \cos(\omega t)$

- 2.1. Pourquoi et dans quel contexte peut-on utiliser la méthode complexe ?
- 2.2. Etablir l'équation complexe vérifiée par $u_C(t)$ par les deux méthodes déjà vues, la résoudre et dire exactement à quoi correspond cette solution.
- 2.3. Redonner la solution temporelle (expression de $u_C(t)$) correspondant à cette solution complexe.
- 2.4. Y-a-t-il encore un régime transitoire ? Et un régime permanent ? Commenter.

Calcul d'impédance

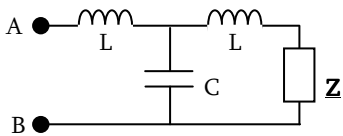
Exercice 4 : Impédance caractéristique

Calculer les impédances complexes équivalentes aux dipôles proposés ci-dessous :



Exercice 5 : Impédance caractéristique

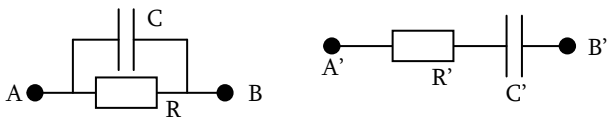
Soit Z_{AB} l'impédance du dipôle AB représenté



- Déterminer l'expression de l'impédance Z telle que $Z_{AB} = Z$.
- Pour quelles valeurs de la pulsation ω cette impédance est-elle modélisable par un résistor ?

Exercice 6 : Dipôles RC équivalents

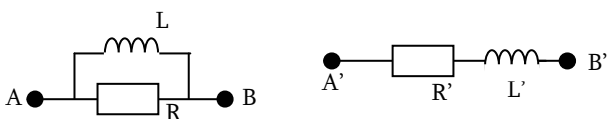
Les dipôles AB et A'B' représentés sont placés dans un circuit en régime sinusoïdal forcé de pulsation ω .



Exprimer R' et C' en fonction de R , C et ω pour que les deux dipôles soient équivalents.

Exercice 7 : Dipôles RL équivalents

Les dipôles AB et A'B' représentés sont placés dans un circuit en régime sinusoïdal forcé de pulsation ω .

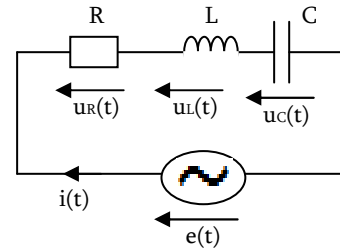


Exprimer R' et L' en fonction de R , L et ω pour que les deux dipôles soient équivalents.

Calcul de tensions et de courants

Exercice 8 : Circuit RLC série

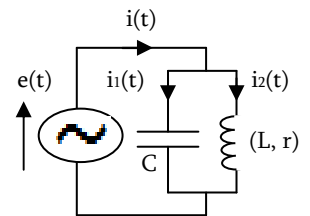
Le circuit suivant est alimenté par un générateur de fréquence $f = 50\text{Hz}$ et d'amplitude $E = 311\text{V}$. La phase à l'origine de la tension $e(t)$ délivrée par le générateur est prise égale à zéro. Données : $R = 40\Omega$, $L = 0,2\text{H}$, $C = 5\mu\text{F}$.



- Exprimer l'amplitude complexe \underline{I} du courant $i(t)$. En déduire l'amplitude I et la phase à l'origine φ_i de l'intensité $i(t)$.
- Exprimer les amplitudes complexes \underline{U}_R , \underline{U}_L et \underline{U}_C des tensions aux bornes de chacun des dipôles. En déduire les amplitudes et les phases à l'origine de ces tensions.
- Calculer la valeur du facteur de qualité $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$ et commenter cette valeur.

Exercice 9 : Intensité dans une association de dipôles

On applique une tension $e(t)$ sinusoïdale de fréquence $f = 50\text{Hz}$, d'amplitude $E = 100\text{V}$ et de phase à l'origine nulle à l'association parallèle d'un condensateur de capacité $C = 20\mu\text{F}$ et d'une bobine réelle d'inductance $L = 0,3\text{H}$ et de résistance interne $r = 10\Omega$.

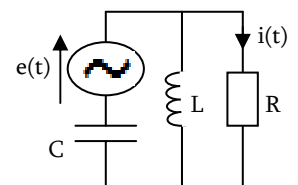


- Exprimer puis calculer le module Z de l'impédance complexe du dipôle constitué par l'association du condensateur et de la bobine.
- En déduire la valeur de l'amplitude I de l'intensité $i(t)$.
- Exprimer les amplitudes complexes \underline{I}_1 et \underline{I}_2 des intensités $i_1(t)$ et $i_2(t)$.
- Représenter \underline{I}_1 et \underline{I}_2 dans le plan complexe et retrouver graphiquement la valeur de l'amplitude I .

Exercice 10 : Courant indépendant du dipôle

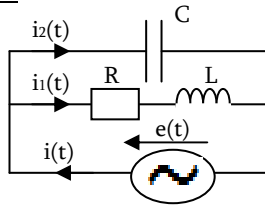
On considère le circuit suivant :

- Exprimer l'amplitude complexe \underline{I} de l'intensité $i(t)$ du courant qui parcourt le résistor.
- A quelle condition l'intensité $i(t)$ est-elle indépendante de la valeur de R ?



Exercice 11 : Calculs d'intensités

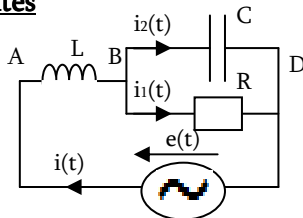
Le circuit suivant est alimenté par un générateur de tension $e(t) = E \cos(2\pi ft)$, de fréquence $f = 50\text{Hz}$ et d'amplitude $E = 311\text{V}$. On a $R = 600\Omega$, $L = 0,3\text{H}$, et $C = 5\mu\text{F}$.



1. Exprimer les amplitudes complexes \underline{I}_1 et \underline{I}_2 des intensités $i_1(t)$ et $i_2(t)$.
2. Représenter dans le plan complexe les amplitudes \underline{I}_1 et \underline{I}_2 .
3. En déduire l'amplitude I de l'intensité $i(t)$ et le déphasage $\varphi_{i \rightarrow e}$ de l'intensité i par rapport à la tension e (graphiquement). Vérifier par le calcul complexe.

Exercice 12 : Calculs d'intensités

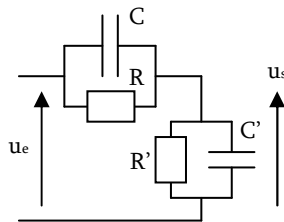
On alimente un dipôle AD par une source de tension sinusoïdale d'amplitude E et de pulsation ω .
Données : $E = 155\text{V}$, $R = 100\Omega$, $\omega = 400\text{rad.s}^{-1}$, et $C = 33\mu\text{F}$.



1. Exprimer l'inductance L en fonction de R , C et ω pour que le dipôle AD soit équivalent à une résistance pure R_{eq} . Calculer L ainsi que R_{eq} .
2. Exprimer puis calculer alors l'amplitude I de l'intensité $i(t)$.
3. Exprimer puis calculer les amplitudes U_{AB} et U_{BD} des tensions $u_{AB}(t)$ et $u_{BD}(t)$.
4. Exprimer puis calculer les amplitudes I_1 et I_2 des intensités $i_1(t)$ et $i_2(t)$.

Exercice 13 : Sonde d'oscilloscope

Lorsque les tensions à appliquer à l'entrée de l'oscilloscope, on utilise une sonde atténuatrice, dont le but est de réduire l'amplitude d'un facteur k identique quelle que soit la fréquence de la tension appliquée.

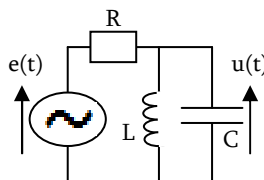


1. Etablir l'expression de l'amplitude \underline{U}_s de la tension u_s en fonction de \underline{U}_e , R , C , R' et C' .
2. Déterminer la relation entre R , C , R' et C' pour que la sonde remplisse les conditions requises. Exprimer le facteur d'atténuation k .

Exercice 14 : Résonance en tension

On considère le circuit suivant, alimenté par une source de tension sinusoïdale :

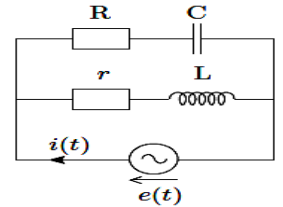
1. Exprimer l'amplitude complexe \underline{U} de la tension $u(t)$.
2. Montrer que pour une certaine valeur de pulsation ω_0 à déterminer, l'amplitude de la tension $u(t)$ est maximale.



Calcul de déphasages

Exercice 15 : Courant et tension en phase

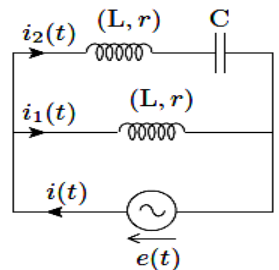
On considère le circuit suivant :



1. Exprimer l'admittance complexe \underline{Y} de l'association de dipôles alimentée par la source de tension ci-contre.
2. Montrer que, sous réserve de conditions à préciser, il existe une pulsation ω_0 telle que l'intensité $i(t)$ et la tension $e(t)$ délivrées par la source soient en phase.

Exercice 16 : Déphasage entre deux branches

On considère le circuit suivant :

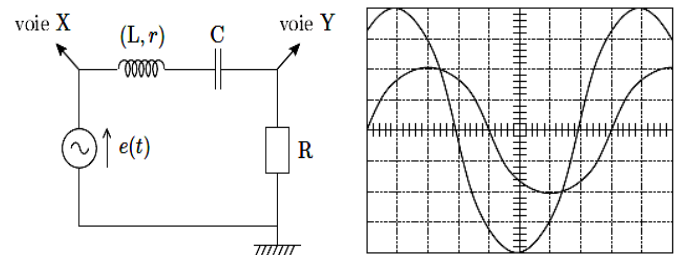


1. Montrer que les intensités $i_1(t)$ et $i_2(t)$ des deux branches sont en quadrature de phase à condition que :

$$\left| \text{Arg } \underline{Z}_1 - \text{Arg } \underline{Z}_2 \right| = \frac{\pi}{2}$$
 Où Z_1 et Z_2 sont les impédances des branches correspondantes
2. En utilisant le plan complexe, en déduire l'expression de C telle que cette condition soit réalisée.

Exercice 17 : Caractéristiques d'une bobine réelle

Pour mesurer l'inductance L et la résistance interne r d'une bobine réelle, on l'insère en série avec un circuit RC, et on alimente le tout par une source de tension sinusoïdale. A l'aide d'un oscilloscope, on visualise l'écran représenté.



Données : $R = 50\Omega$ et $C = 1\mu\text{F}$
Réglages : voie X et Y : 1V/div , base de temps $0,1\text{ms/div}$

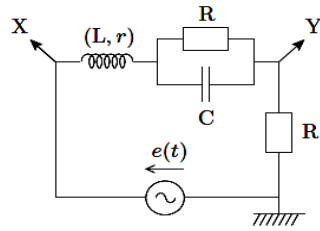
1. Attribuer les voies X et Y aux deux courbes dessinées.
2. En utilisant le déphasage entre les deux voies, établir la relation : $R + r = L\omega - \frac{1}{C\omega}$
3. En utilisant les amplitudes, en déduire l'expression puis la valeur numérique de r .
4. Calculer L .

Exercice 18 : Mesure d'une inductance

On réalise le montage représenté et on constate sur l'oscilloscope que pour une fréquence $f_0 = 180\text{Hz}$, les signaux recueillis sur les voies X et Y sont en phase.

Données : $R = 100\Omega$, $C = 10\mu\text{F}$.

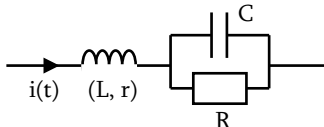
En déduire l'expression puis la valeur de l'inductance L de l'inductance L de la bobine



Puissance en Régime Sinusoïdal Forcé

Exercice 19 : Association de dipôles

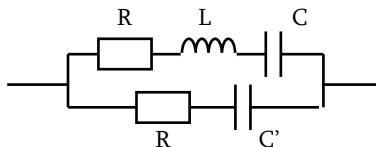
On considère l'association de dipôles suivante, soumise à une tension sinusoïdale $u(t)$ et parcourue par une intensité $i(t)$.



1. Exprimer l'impédance complexe Z de l'association.
2. En déduire la puissance moyenne P consommée par l'association, en fonction de r , R , C et ω , et de l'intensité efficace I_e .

Exercice 20 : Puissance équivalente dans 2 branches

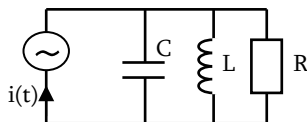
L'association parallèle des deux branches est soumise à une tension sinusoïdale $u(t)$;



1. Exprimer en fonction de la tension efficace U_e les puissances moyennes consommées par chacune des branches.
2. A quelle condition les deux branches consomment-elles la même puissance?

Exercice 21 : Circuit RLC parallèle

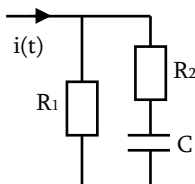
Le circuit suivant est alimenté par une source de courant sinusoïdal $i(t)$ d'intensité efficace I_e .



1. Exprimer l'impédance complexe Z de l'association R , L et C . En déduire l'expression de la puissance moyenne P consommée par le circuit.
2. Retrouver P en sommant les puissances consommées par chacun des dipôles.

Exercice 22 : Calcul d'intensité efficace

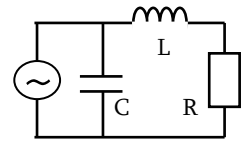
Dans le circuit suivant, les composants sont tels que $R_1 = 5\Omega$, $R_2 = 4\Omega$, et $1/C\omega = 4\Omega$. La puissance moyenne consommée par l'association est $P = 500\text{W}$.



1. Calculer numériquement l'impédance complexe Z de l'association.
2. En déduire la valeur de l'intensité efficace I_e du courant $i(t)$ qui traverse l'association.

Exercice 23 : Etude énergétique d'un circuit

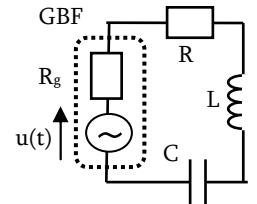
Le circuit suivant est alimenté par la tension du secteur de valeur efficace $U_e = 220\text{V}$ et de fréquence $f = 50\text{Hz}$.



1. Exprimer en fonction de R , L et f la puissance moyenne P consommée par le circuit.
2. Pour quelle valeur de résistance R_{opt} la puissance reçue est-elle maximale? Sachant que $R_{opt} = 12\Omega$, calculer L .
3. On fixe $R = R_{opt}$. Le facteur de puissance du circuit étant de plus égal à 1, exprimer puis calculer la capacité C .

Exercice 24 : Circuit RLC série alimenté par un GBF

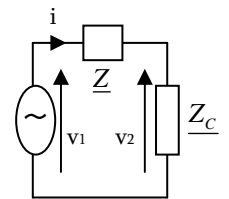
Le circuit RLC série est alimenté par un GBF de résistance interne R_g , qui délivre une tension à vide de valeur efficace U_e .



1. Exprimer en fonction des données la puissance moyenne P consommée par l'association RLC.
2. Pour quelle valeur de pulsation ω_{opt} cette puissance est-elle maximale?
3. En prenant $\omega = \omega_{opt}$, pour quelle valeur de R la puissance dissipée est-elle maximale?

Exo 25 : Etude d'un transfert de puissance électrique

Un générateur de fém sinusoïdale de fréquence 50Hz , de pulsation ω , maintient entre ses bornes une différence de potentiel v_1 . Par une ligne de transport de l'électricité, d'impédance totale $Z = R + jX = Z_0 \cdot \exp(j\alpha)$ (avec $R = 50\Omega$ et $X = 87\Omega$), il alimente un appareil, appelé la charge, d'impédance Z_C .



La charge consomme, en fonctionnement normal la puissance moyenne $P_C = 400\text{kW}$ lorsqu'elle est alimentée sous tension v_2 , de valeur efficace $V_2 = 22\text{kV}$. On utilisera la notation complexe et on choisira v_2 comme origine des phases en posant $v_2(t) = V_2 \sqrt{2} \cos(\omega t)$. Notons $\underline{i} = I \sqrt{2} e^{j\omega t + j\psi}$ et $\underline{v}_1 = V_1 \sqrt{2} e^{j\omega t + j\theta}$. En fonctionnement normal, on a $\psi = -60^\circ$.

1. Déterminer α et Z_0 .
2. Calculer la valeur efficace I du courant i qui doit parcourir la charge.
3. Déterminer les caractéristiques V_1 et θ que doit fournir le générateur
4. Déterminer la puissance P_G fournie par le géné, la puissance P_C consommée par la charge, la puissance P_1 perdue par la ligne et le rendement $\eta = P_C/P_G$ du transfert de puissance.

Facteur de Puissance

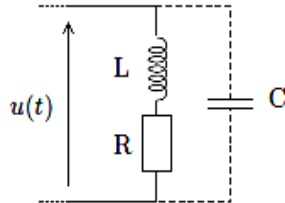
Exercice 26 : Puissance d'un moteur

Du point de vue électrique, un moteur peut être modélisé par un dipôle RL série. Alimenté par une tension sinusoïdale $u(t)$ de fréquence $f = 50\text{Hz}$ et de valeur efficace $U_e = 220\text{V}$, le moteur consomme une puissance moyenne $P = 1\text{kW}$ pour une intensité efficace $I_e = 7\text{A}$.

1. Calculer les valeurs de R et de L
2. Calculer le facteur de puissance $\cos \varphi$ du moteur

On ajoute un condensateur de capacité C en parallèle avec le moteur.

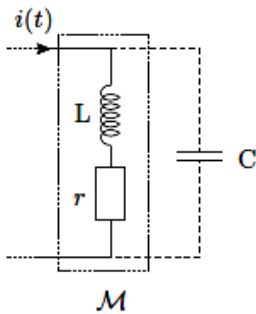
3. Calculer C pour que le facteur de puissance de l'ensemble (moteur + condensateur) soit égal à 1.
4. Quel est l'intérêt de ramener le facteur de puissance à 1?



Exercice 27 : Relèvement d'un facteur de puissance

Un moteur M est modélisé par une bobine réelle d'inductance L et de résistance r . Il est alimenté en courant alternatif de fréquence $f = 50\text{Hz}$ et de tension efficace $U_e = 220\text{V}$. La puissance moyenne consommée par le moteur est $P = 4,4\text{kW}$ et son facteur de puissance est égal à 0,6.

1. Calculer l'intensité efficace I_e du courant qui circule dans le moteur.
2. Exprimer puis calculer r . En déduire L .
3. Justifier le fait que le facteur de puissance peut augmenter grâce à l'ajout d'un condensateur en parallèle avec le moteur. Cet ajout engendret-il un surcoût de consommation ?

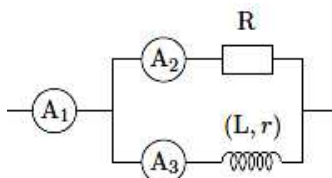


On suppose que le facteur de puissance est relevé à la valeur 1.

4. Calculer la nouvelle valeur I_e' de l'intensité efficace du courant qui alimente l'association. Quel est l'intérêt du relèvement du facteur de puissance ?
5. Calculer la valeur de la capacité C du condensateur à ajouter.

Exercice 28 : Méthode des 3 ampèremètres

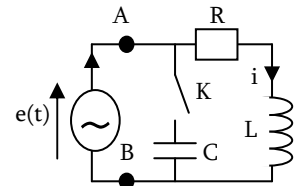
Un abonné EDF branche sur le secteur une lampe, modélisée par un conducteur ohmique de résistance R , et un moteur, modélisé par une bobine réelle d'inductance L et de résistance r . Trois ampèremètres, placés tel qu'il est indiqué sur le schéma, mesurent les intensités efficaces suivantes : $I_{e1} = 40\text{A}$, $I_{e2} = 12\text{A}$ et $I_{e3} = 30\text{A}$.



1. En posant que la phase à l'origine de la tension du secteur est nulle, représenter approximativement dans le plan complexe les amplitudes complexes \underline{I}_2 et \underline{I}_3 .
2. En déduire géométriquement, puis par le calcul la valeur du facteur de puissance $\cos \varphi$ de l'installation complète en fonction des trois intensités efficaces.

Exercice 29 : Facteur de puissance d'une installation

Une bobine, d'inductance L et de résistance R , est alimentée par une source libre de tension $e(t) = E\sqrt{2} \cos(\omega t)$. On donne $R = 100\Omega$, $E = 30\text{V}$, fréquence $f = 40\text{kHz}$ et $L = 0,24\text{mH}$.

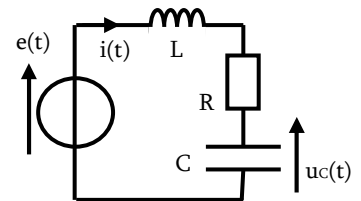


1. Calculer le facteur de puissance F_P du dipôle R_L entre A et B.
2. En abaissant l'interrupteur K , on branche le condensateur aux bornes du dipôle RL . Déterminer la valeur de la capacité C qui permet d'obtenir un facteur de puissance égal à 0,98, le courant principal $i'(t)$ étant en retard de phase par rapport à la tension $e(t)$.

Phénomène de Résonance

Exercice 30 : Résonance d'un RLC série

On étudie un circuit RLC série, alimenté par une source de tension sinusoïdale de pulsation ω et d'amplitude E_m , tel que représenté ci-contre :



1. Résonance en tension :

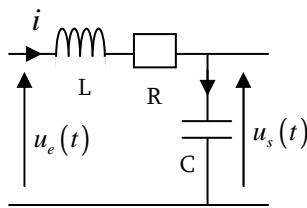
- 1.1. Exprimer l'amplitude complexe \underline{U}_{Cm} de la tension $u_C(t)$ en fonction des données et de l'amplitude E de $e(t)$. On introduira le facteur de qualité Q ainsi que la pulsation propre ω_0 du circuit.
- 1.2. Donner alors l'amplitude U_{Cm} réelle de la tension $u_C(t)$.
- 1.3. Rechercher le maximum de U_{Cm} . Peut-il y avoir plusieurs maxima locaux ? Sous quelle condition ? Préciser pour quelles pulsations ils sont atteints, et leur expression.

2. Résonance en courant :

- 2.1. Exprimer de la même manière l'amplitude complexe \underline{I}_m du courant $i(t)$ en fonction des données et de E .
- 2.2. Donner alors l'amplitude I_m réelle du courant $i(t)$.
- 2.3. Rechercher le maximum de I_m . Peut-il y avoir plusieurs maxima locaux ? Préciser pour quelle pulsation il est atteint, ainsi que son expression.
- 2.4. Comparer les deux résonances.

Exercice 31 : Résonance en tension d'un circuit RLC

Un circuit RLC série est alimenté par une tension d'entrée $u_e(t) = U_{em} \cos(\omega t)$. Sinusoïdale, et on note $u_s(t) = U_{sm} \cos(\omega t + \varphi)$ la tension aux bornes du condensateur de capacité C.



1. Quelle est, sans calculs, la nature du filtre ?
2. On pose $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ et $Q = \frac{L\omega_0}{R}$. Que représentent ω_0 et Q ?
3. Exprimer la fonction de transfert $H(x) = \frac{u_s}{u_e}$ de ce filtre en fonction de Q et x.
4. Montrer que le Gain G passe par un maximum à condition que $Q > Q_i$ et préciser la valeur de Q_i . Quelle est alors la valeur de G_{max} en fonction de Q.
5. Tracer le diagramme de Bode de ce filtre pour $Q_1 = 5$ et $Q_2 = 0,5$.

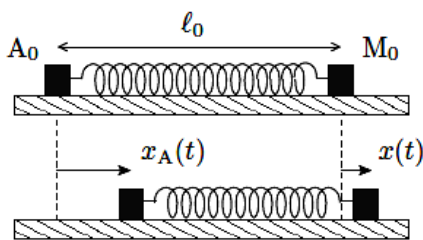
Régime Sinus Forcé en Mécanique

Exo 32 : Réponse d'un oscillateur à une excitation sinus

Un point matériel M, de masse m, peut se déplacer sur un axe horizontal. Il est accroché à l'extrémité d'un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide l_0 , dont l'autre extrémité, notée A est soumise à un mouvement rectiligne sinusoïdal du type :

$$x_A(t) = X_A \cos(\omega t)$$

On note x(t) le déplacement du point M par rapport à sa position d'équilibre.



1. Exprimer l'allongement $\Delta l(t)$ du ressort à la date t, en fonction de x(t) et de $x_A(t)$.
2. Déterminer l'équation différentielle du second ordre vérifiée par x(t), en négligeant les frottements et en introduisant la pulsation $\omega_0 = \sqrt{k/m}$

On suppose que le régime forcé est atteint. On pose donc :

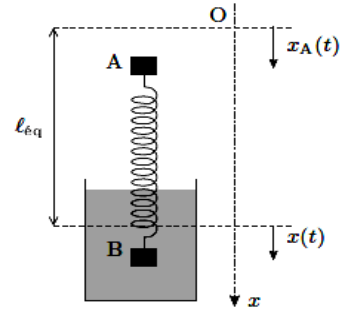
$$x(t) = X \cos(\omega t + \varphi)$$

3. Exprimer l'amplitude complexe \underline{X} du déplacement x(t).
4. Exprimer l'amplitude X des oscillations du point M en fonction de la pulsation ω et tracer l'allure du graphe X(ω). Que se passe-t-il à la pulsation $\omega = \omega_0$?

Exo 33 : Oscillations forcées dans un milieu liquide

Une bille B, assimilée à un point matériel de masse m, est suspendue à l'extrémité inférieure d'un ressort vertical, de longueur à vide l_0 et de constante de raideur k. La bille plonge de plus dans un liquide, lui communiquant du fait des forces pressantes une poussée d'Archimède : $\vec{\Pi} = -M \cdot \vec{g}$, où M est la masse de liquide déplacée par la bille et \vec{g} le champ de pesanteur. Les frottements exercés par le liquide sur la bille sont modélisés par une force $\vec{f} = -h \cdot \vec{v}$, où \vec{v} est la vitesse instantanée de la bille.

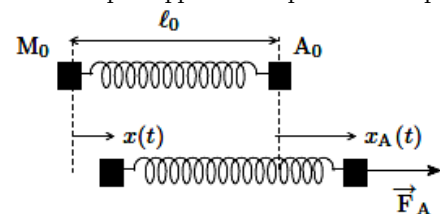
On impose à l'extrémité supérieure du ressort, notée A, un déplacement vertical $x_A(t) = X_A \cos(\omega t)$, tel que $x_A = 0$ lorsque le système est à l'équilibre. Les cotes de A et B sont mesurées par rapport à l'axe vertical descendant (Ox).



1. En étudiant le système à l'équilibre (le point A étant à l'équilibre), déterminer l'expression de la longueur l_{eq} du ressort.
- Dans toute la suite, on se place en régime sinusoïdal forcé et on pose $x(t) = X \cos(\omega t + \varphi)$, le déplacement de la bille B par rapport à sa position d'équilibre.
2. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par x(t), en fonction de m, h, k et $x_A(t)$.
 3. Exprimer l'amplitude complexe \underline{X} des oscillations, en déduire l'amplitude X.
 4. Déterminer à quelle condition l'amplitude des oscillations peut devenir supérieure à celle de l'excitation.

Exercice 34 : Système élastique de deux masses

Deux points matériels A et M, de même masse m, sont reliés par un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide l_0 . Ces deux points peuvent coulisser sans frottement suivant un axe horizontal (Ox). On soumet le point A à une force sinusoïdale : $\vec{F}_A(t) = F_0 \cos(\omega t) \cdot \vec{u}_x$. On note $x_A(t)$ et x(t) les déplacements respectifs de A et M par rapport à leur position au repos.



1. En appliquant le principe fondamental de la dynamique aux points A et M, déterminer l'équation différentielle vérifiée par $S(t) = x(t) + x_A(t)$. Exprimer la solution S(t) en fonction des données.
2. En déduire l'équation différentielle vérifiée par x(t), en fonction de F_0 , m, ω et $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.
3. Exprimer l'amplitude X(ω) des oscillations de M. Tracer l'allure de la courbe X(ω).

Cadre de la Méthode Complexe

Exercice 1 : Circuit RC en Sinus Forcé

1. Etude temporelle en régime continu :

- 1.1. Equa diff : $RC \frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t) = E, \quad \tau = RC$
- 1.2. Résolution : $\Rightarrow u_c(t) = E \left(1 - e^{-t/\tau}\right)$
- 1.3. Solution SSM : Sol^o transitoire, disparaît au bout de 3τ
- 1.4. Solution PART : Solution en régime permanent (= régime établi) quand $t \rightarrow +\infty$ (valeur finale)
- 1.5. Changement de CI : $\Rightarrow u_c(t) = E e^{-t/\tau}$, on a que la solution transitoire, puisqu'en régime permanent, $u=0$.

2. Etude temporelle en sinus forcé

- 2.1. Equation possible à résoudre, mais un peu dur...
 $RC \frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t) = E \cos(\omega t)$
- 2.2. Méthode complexe utilisable en régime sinus forcé, c'est-à-dire avec une excitation purement sinusoïdale, et en régime établi (après le régime transitoire).
- 2.3. Première méthode : $\begin{cases} \frac{d}{dt} & \leftrightarrow & \times j\omega \\ E \cos(\omega t) & \leftrightarrow & E \cdot e^{j\omega t} \end{cases}$
 On obtient : $RC \cdot j\omega \cdot \underline{u_c} + \underline{u_c} = E \cdot e^{j\omega t}$
 Ou en amplitude complexe : $jRC\omega \cdot \underline{U_{cm}} + \underline{U_{cm}} = E$

$$\underline{u_c} = \frac{1}{R + \frac{1}{jC\omega}} E \cdot e^{j\omega t} = \frac{E \cdot e^{j\omega t}}{1 + jRC\omega}$$
- 2.4. Seconde méthode : $\underline{u_c} = \frac{E \cdot e^{j\omega t}}{1 + jRC\omega}$ ou $\underline{U_{cm}} = \frac{E}{1 + jRC\omega}$, c'est la solution qui correspond au régime établi (permanent)
- 2.6. Solution temporelle : $\begin{cases} \underline{U_{cm}} = |\underline{U_{cm}}| = \frac{E}{\sqrt{1 + R^2 C^2 \omega^2}} \\ \varphi_c = \text{Arg}(\underline{U_{cm}}) = -\text{Arc tan}(RC\omega) \end{cases}$
 ainsi : $u_c(t) = U_{cm} \cos(\omega t + \varphi_c)$
- 2.7. Oui, il y a encore un régime transitoire, que l'on a pas calculé, et un régime permanent, dont la solution est celle qui est obtenue à partir de la solution complexe.
- 2.8. Utilité du régime transitoire ? La majorité du temps, la solution en permanent suffit (application aux filtres...)

Exercice 2 : Circuit RL en Sinus Forcé

1. Etude temporelle en régime continu :

- 1.1. Equa diff : $\frac{L}{R} \cdot \frac{di(t)}{dt} + i(t) = \frac{E}{R}, \quad \tau = \frac{L}{R}$
- 1.2. Résolution : $\Rightarrow i(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-t/\tau}\right)$
- 1.3. Solution SSM : Sol^o transitoire, disparaît au bout de 3τ
- 1.4. Solution PART : Solution en régime permanent (= régime établi) quand $t \rightarrow +\infty$ (valeur finale)

- 1.5. Changement de CI : $\Rightarrow i(t) = \frac{E}{R} e^{-t/\tau}$, on a que la solution transitoire, puisqu'en régime permanent, $i=0$.

2. Etude temporelle en sinus forcé

- 2.1. Equation possible à résoudre, mais un peu dur...
 $\frac{L}{R} \cdot \frac{di(t)}{dt} + i(t) = \frac{E}{R} \cdot \cos(\omega t)$
- 2.2. Méthode complexe utilisable en régime sinus forcé, c'est-à-dire avec une excitation purement sinusoïdale, et en régime établi (après le régime transitoire).
- 2.3. Première méthode : $\begin{cases} \frac{d}{dt} & \leftrightarrow & \times j\omega \\ E \cos(\omega t) & \leftrightarrow & E \cdot e^{j\omega t} \end{cases}$
 On obtient : $\frac{L}{R} \cdot j\omega \cdot \underline{i} + \underline{i} = \frac{E}{R} \cdot e^{j\omega t}$
 Ou en amplitude complexe : $j \frac{L}{R} \omega \cdot \underline{I_m} + \underline{I_m} = \frac{E}{R}$
- 2.4. Seconde méthode : $\underline{i} = \frac{\underline{u_R}}{R} = \frac{E \cdot e^{j\omega t}}{R + jL\omega}$
- 2.5. On résout : $\underline{i} = \frac{E \cdot e^{j\omega t}}{R + jL\omega}$ ou $\underline{I_m} = \frac{E}{R + jL\omega}$, c'est la solution qui correspond au régime établi (permanent)
- 2.6. Solution temporelle : $\begin{cases} \underline{I_m} = |\underline{I_m}| = \frac{E}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} \\ \varphi_i = \text{Arg}(\underline{I_m}) = -\text{Arc tan}(L/R) \end{cases}$
 ainsi : $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$
- 2.7. Oui, il y a encore un régime transitoire, que l'on n'a pas calculé, et un régime permanent, dont la solution est celle qui est obtenue à partir de la solution complexe.
- 2.8. Utilité du régime transitoire ? La majorité du temps, la solution en permanent suffit (application aux filtres...)

Exercice 3 : Circuit RLC en Sinus Forcé

1. Etude temporelle en régime continu :

- 1.1. Equa diff : $LC \frac{d^2 u_c(t)}{dt^2} + RC \frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t) = E$
- 1.2. Résolution... Voir ExoTech n4... SSM \rightarrow solution transitoire, PART \rightarrow solution permanente (établie)
- 1.3. Résolution... Voir ExoTech n4... 3 régimes possibles en fonction de l'amortissement... valeur finale nulle.

2. Etude temporelle en sinus forcé

- 2.1. Méthode complexe pour simplifier en régime établi pour une excitation purement sinusoïdale.
- 2.2. Equation complexe : $(-LC\omega^2 + jRC\omega + 1)\underline{u_c} = E \cdot e^{j\omega t}$
- 2.3. Solution temporelle : $\begin{cases} \underline{U_{cm}} = |\underline{U_{cm}}| = \frac{E}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + (RC\omega)^2}} \\ \varphi_c = \text{Arg}(\underline{U_{cm}}) = -\text{Arc tan}\left(\frac{RC\omega}{1 - LC\omega^2}\right) \end{cases}$
 ainsi : $u_c(t) = U_{cm} \cos(\omega t + \varphi_c)$
- 2.4. Oui, régime transitoire non calculé (inutile), la solution complexe est la solution du régime établi.

Calculs d'impédances

Exercice 4 : Impédance caractéristique

RC série :
$$\underline{Z}_{eq} = R + \frac{1}{jC\omega} = \frac{1 + jRC\omega}{jC\omega}$$

RL série :
$$\underline{Z}_{eq} = R + jL\omega$$

RC parallèle :
$$\underline{Z}_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{R} + jC\omega} = \frac{R}{1 + jRC\omega}$$

RL parallèle :
$$\underline{Z}_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{jL\omega}} = \frac{jRL\omega}{R + jL\omega}$$

RLC série :
$$\underline{Z}_{eq} = R + \frac{1}{jC\omega} + jL\omega = \frac{1 + jRC\omega - LC\omega^2}{jC\omega}$$

RLC parallèle :
$$\underline{Z}_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{R} + jC\omega + \frac{1}{jL\omega}} = \frac{jRL\omega}{R + jL\omega - RLC\omega^2}$$

Exercice 5 : Impédance caractéristique

1. On a
$$\underline{Z}_{AB} = jL\omega + \frac{1}{jC\omega + \frac{1}{jL\omega + \underline{Z}}}$$

Et
$$\underline{Z}_{AB} = \underline{Z} \Leftrightarrow \underline{Z}(1 - LC\omega^2 + jC\omega\underline{Z}) = jL\omega(2 - LC\omega^2) + (1 - LC\omega^2)\underline{Z}$$

Il faut donc :
$$\underline{Z} = \sqrt{\frac{L}{C}(2 - LC\omega^2)} = \sqrt{\frac{2L}{C} - L^2\omega^2}$$

2. Résistor si Z réelle, donc si
$$\frac{2L}{C} > L^2\omega^2 \Leftrightarrow \omega < \sqrt{\frac{2}{LC}}$$

Exercice 6 : Dipôles RC équivalents

2 dipôles équivalents :
$$\underline{Z}_{série} = \frac{1 + jR'C'\omega}{jC'\omega} = \underline{Z}_{||} = \frac{R}{1 + jRC\omega}$$

Donc :
$$(1 - RCR'C'\omega^2) + j\omega(R'C' + RC - RC') = 0$$

Et
$$\begin{cases} \text{(partie réelle)} \\ 1 - RCR'C'\omega^2 = 0 \\ R'C' + RC - RC' = 0 \\ \text{(partie imaginaire)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C' = C \left(1 + \frac{1}{(RC\omega)^2} \right) \\ R' = \frac{R}{1 + (RC\omega)^2} \end{cases}$$

Exercice 7 : Dipôles RL équivalents

Idem...
$$\underline{Z}_{série} = R' + jL'\omega = \underline{Z}_{||} = \frac{jRL\omega}{R + jL\omega}$$

Donc
$$R' = R \left(1 + \frac{L^2\omega^2}{R^2} \right) \quad \text{et} \quad L' = L \left(1 + \frac{R^2}{L^2\omega^2} \right)$$

Calcul de tensions et de courants

Exercice 8 : Circuit RLC série

1. On a
$$\underline{Z}_{eq} = R + \frac{1}{jC\omega} + jL\omega$$
, donc
$$\underline{I} = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_{eq}} = \frac{E}{R + \frac{1}{jC\omega} + jL\omega}$$

Et :
$$I = |\underline{I}| = \frac{E}{\left| R + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \right|} = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2}} = 0,54 A$$

$$\varphi_i = \text{Arg}(\underline{I}) = \text{Arg}(\underline{E}) - \text{Arg}(\underline{Z}_{eq}) = \text{Arc tan} \left(\frac{1}{R} \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \right) = 86^\circ$$

2. On a :

$$\begin{cases} \underline{U}_R = \frac{R \cdot \underline{E}}{R + \frac{1}{jC\omega} + jL\omega} \\ \underline{U}_C = \frac{\underline{E}/jC\omega}{R + \frac{1}{jC\omega} + jL\omega} \\ \underline{U}_L = \frac{jL\omega \cdot \underline{E}}{R + \frac{1}{jC\omega} + jL\omega} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U_R = |\underline{U}_R| = \dots \\ \varphi_R = \text{Arg}(\underline{U}_R) = \dots = 86^\circ \\ U_C = |\underline{U}_C| = \dots \\ \varphi_C = \text{Arg}(\underline{U}_C) = \dots = -4^\circ \\ U_L = |\underline{U}_L| = \dots \\ \varphi_L = \text{Arg}(\underline{U}_L) = \dots = 176^\circ \end{cases}$$

3. Facteur de qualité
$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = 4 \rightarrow$$
 Il y aura un phénomène de surtension aux bornes du condensateur.

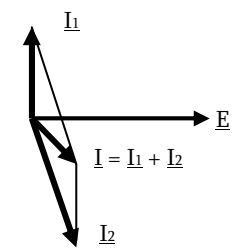
Exercice 9 : Intensité dans une association de dipôles

1.
$$\underline{Z}_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{r + jL\omega} + \frac{1}{1 + jrC\omega - LC\omega^2}}$$

Donc :
$$Z = |\underline{Z}_{eq}| = \frac{\sqrt{r^2 + (L\omega)^2}}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + (rC\omega)^2}} = 234 \Omega$$

2. Ainsi :
$$I = |\underline{I}| = \frac{E}{Z} = \frac{E}{234} = 0,44 A$$

3.
$$\begin{cases} \underline{I}_1 = \frac{\underline{E}}{Z_C} = jC\omega \cdot \underline{E} \\ \underline{I}_2 = \frac{\underline{E}}{Z_L} = \frac{\underline{E}}{r + jL\omega} \end{cases}$$



$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2$$

4. On a
$$\begin{cases} I_1 = |\underline{I}_1| = C\omega E = 0,628 A \\ I_2 = |\underline{I}_2| = E / \sqrt{r^2 + L^2\omega^2} = 1,06 A \\ \text{Arg}(r + jL\omega) = \text{Arc tan} \left(\frac{L\omega}{r} \right) = 84^\circ \end{cases}$$

Exercice 10 : Courant indépendant du dipôle

1.
$$\underline{U}_R = \frac{Z_{||R}}{Z_C + Z_{||R}} \cdot \underline{E} = \frac{jRL\omega}{R + jL\omega} \cdot \underline{E} = \frac{-RLC\omega^2}{R + jL\omega - RLC\omega^2} \cdot \underline{E}$$

Ainsi :
$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_R}{R} = \frac{-LC\omega^2}{R(1 - LC\omega^2) + jL\omega} \cdot \underline{E}$$

2. i(t) indépendant de R si
$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} ?$$

Exercice 11 : Caculs d'intensités

1. $I_1 = \frac{1}{R + jL\omega} \cdot E$ et $I_2 = jC\omega \cdot E$ ($I_2=0,488A$)

2. Calcul : $I_1 = |I_1| = \frac{E}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} = 0,512A$

$\varphi_1 = Arg(I_1) = -Arc \tan\left(\frac{L\omega}{R}\right) = -9^\circ$

3. Graphiquement...

$Z_{eq} = \frac{1}{jC\omega + \frac{1}{R + jL\omega}} = \frac{R + jL\omega}{(1 - LC\omega^2) + jRC\omega}$

On vérifie :

$I = |I| = \frac{E \sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + (RC\omega)^2}}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} = 0,62A$
 $\varphi_i = 0 - Arc \tan\left(\frac{L\omega}{R}\right) + Arc \tan\left(\frac{RC\omega}{1 - LC\omega^2}\right) = 39^\circ$

Exercice 12 : Calculs d'intensités

1. On a $Z_{eq} = jL\omega + \frac{1}{jC\omega + \frac{1}{R}}$

ou $Z_{eq} = jL\omega + \frac{R(1 - jRC\omega)}{1 + R^2C^2\omega^2} = R_{eq} + j\left(L\omega - \frac{R^2C\omega}{1 + R^2C^2\omega^2}\right)$

Ainsi: $R_{eq} = \frac{R}{1 + R^2C^2\omega^2} = 36,4\Omega$ et $L = \frac{R^2C}{1 + R^2C^2\omega^2} = 0,12H$

(Partie imaginaire nulle, il reste la partie réelle = Req)

2. Alors: $I = E / Req = 4,3A$

3. Tensions $U_{AB} = |U_{AB}| = |jL\omega I| = L\omega I = 206V$
 $U_{BD} = |U_{BD}| = |Z_{R||C} \cdot I| = \frac{RI}{\sqrt{1 + R^2C^2\omega^2}} = 260V$

4. Intensités $I_1 = U_{BD} / R = 2,6A$ et $I_2 = |I_2| = |jC\omega U_{BD}| = 3,4A$

Exercice 13 : Sonde d'oscilloscope

1. Relation: $U_s = \frac{1}{1 + \frac{R}{R'} \cdot \frac{1 + jRC'\omega}{1 + jR'C\omega}} \cdot U_E \rightarrow k = \frac{R'}{R + R'}$

2. Il faut $R'C = RC'$ (ne dépend plus de la fréquence)

Exercice 14 : Résonance en tension

1. $U = \frac{Z_{L|C}}{R + Z_{L|C}} \cdot E = \frac{jL\omega}{R + \frac{jL\omega}{1 - LC\omega^2}} \cdot E = \frac{1}{1 + jR\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)} \cdot E$

2. Amplitude: $U = |U| = \frac{E}{\sqrt{1 + R^2\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2}}$

On dérive: $\frac{dU}{d\omega} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \frac{2R^2\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)\left(C + \frac{1}{L\omega^2}\right)}{\left(1 + R^2\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2\right)^{3/2}} = 0$

On retrouve la pulsation de coupure: $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

Calcul de déphasages

Exercice 15 : Courant et tension en phase

1. $Y_{eq} = \frac{1}{R + \frac{1}{jC\omega}} + \frac{1}{r + jL\omega} = \frac{jC\omega}{1 + jRC\omega} + \frac{1}{r + jL\omega}$

$Y_{eq} = \frac{(1 - LC\omega^2) + j(r + R)C\omega}{(r - RLC\omega^2) + j\omega(L + rRC)}$

2. On a $\underline{u} = Z_{eq} \cdot \underline{i}$ ou $\underline{i} = Y_{eq} \cdot \underline{u}$, donc u et i sont en phase si $Arg(Y_{eq}) = 0$

C'est à dire: $Arc \tan\left(\frac{(r + R)C\omega}{1 - LC\omega^2}\right) = Arc \tan\left(\frac{\omega(L + rRC)}{r - RLC\omega^2}\right)$

$\Rightarrow \frac{(r + R)C}{1 - LC\omega^2} = \frac{(L + rRC)}{r - RLC\omega^2} \Rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{L - r^2C}{L - R^2C}}$

Exercice 16 : Déphasage entre deux branches

1. On a $\underline{e} = Z_1 \cdot \underline{i}_1 = Z_2 \cdot \underline{i}_2$ ou en amplitude complexe:

$E_m = Z_1 \cdot I_{m1} = Z_2 \cdot I_{m2}$

Et $i_1(t)$ et $i_2(t)$ en quadrature $|Arg(I_{m1}) - Arg(I_{m2})| = \frac{\pi}{2}$

Or $Arg(Z_1) + Arg(I_{m1}) = Arg(Z_2) + Arg(I_{m2})$

Donc on a également :

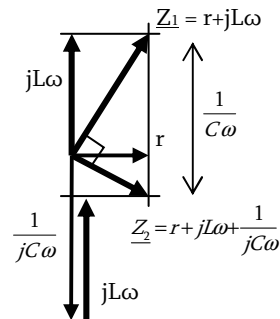
$|Arg Z_1 - Arg Z_2| = \frac{\pi}{2}$

2. Angle droit entre Z_1 et Z_2
 SSI Pythagore est respectée:

$\left(\frac{1}{C\omega}\right)^2 = Z_1^2 + Z_2^2$

$\left(\frac{1}{C\omega}\right)^2 = (r^2 + L^2\omega^2) + \left(r^2 + \left(\frac{1}{C\omega} - L\omega\right)^2\right)$

Ainsi: $C = \frac{L}{r^2 + L^2\omega^2}$



Exercice 17 : Caractéristiques d'une bobine réelle

1. Y est nécessairement d'amplitude plus faible que X, car le circuit est passif, et il d'agit de la tension aux bornes d'une R. Attention, une surtension ne peut apparaître qu'aux bornes d'un C ou d'une L (qui stockent l'énergie).

2. On a $U_y = \frac{R}{R + r + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)} \cdot U_x$ et on lit sur

la courbe un déphasage de $\pi/4$, donc :

$Arg\left(R + r + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)\right) = \frac{\pi}{4} = Arc \tan\left(\frac{L\omega - 1/C\omega}{R + r}\right)$

Ainsi: $R + r = L\omega - \frac{1}{C\omega}$

3. On lit un gain $G = \frac{|U_y|}{|U_x|} = \frac{1}{2} = \frac{|R|}{\left|R + r + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)\right|}$

Donc : $\frac{1}{2} = \frac{R}{\sqrt{(R+r)^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} = \frac{R}{\sqrt{2(R+r)^2}}$

Et : $2(R+r)^2 = 4R^2 \Rightarrow R+r = \pm R\sqrt{2} \Rightarrow r = R(\sqrt{2}-1) = 21\Omega$

4. On en déduit : $L = \frac{1}{\omega} \left(R+r + \frac{1}{C\omega} \right) = 25\text{mH}$

Exercice 18 : Mesure d'une inductance

On a $\frac{U_Y}{U_X} = \frac{R}{R+r+jL\omega + \frac{R}{1+jRC\omega}} \cdot U_X$ en phase

$\Rightarrow \text{Arg} \left(\frac{U_Y}{U_X} \right) = 0 = -\text{Arg} \left(R+r+jL\omega + \frac{R}{1+jRC\omega} \right)$

D'où : ... $L = \frac{R^2 C}{1+R^2 C^2 \omega^2} = 44\text{mH}$

Puissance en Régime Sinusoïdal Forcé

Exercice 19 : Association de dipôles

1. Impédance : $\underline{Z} = r + jL\omega + \frac{R}{1+jRC\omega}$

2. P active : $P = \text{Re}(\underline{Z}) \times I_e^2 = \left(r + \frac{R}{1+R^2 C^2 \omega^2} \right) \times I_e^2$

Exercice 20 : Puissance équivalente dans 2 branches

1. Dans les deux branches: P et P'

$$\begin{cases} P = R \times I_e^2 = R \times \frac{U_e^2}{Z^2} = R \times \frac{U_e^2}{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} \\ P' = R \times I_e'^2 = R \times \frac{U_e^2}{Z'^2} = R \times \frac{U_e^2}{R^2 + \left(\frac{1}{C'\omega}\right)^2} \end{cases}$$

2. Même puissance si : $\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 = \left(\frac{1}{C'\omega}\right)^2$

Exercice 21 : Circuit RLC parallèle

1. $\underline{Z} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{jL\omega} + jC\omega} = \frac{1}{\frac{1}{R} + j\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)}$, on en déduit :

$$P = \text{Re}(\underline{Z}) \times I_e^2 = \frac{\frac{1}{R} \times I_e^2}{\frac{1}{R^2} + \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2} = \frac{R \times I_e^2}{1 + R^2 \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2}$$

2. $P_C = P_L = 0$, et $P_R = R I_R^2$, avec

$$\underline{I}_R = \frac{\underline{Z}_{L/C}}{R + \underline{Z}_{L/C}} \cdot \underline{I} = \frac{1}{1 + R \left(jC\omega + \frac{1}{jL\omega} \right)} \cdot \underline{I} \quad \text{et} \quad I_R = \left| \frac{\underline{Z}_{L/C}}{R + \underline{Z}_{L/C}} \right| \cdot I_e$$

Exercice 22 : Calcul d'intensité efficace

1. Impédance: $\underline{Z} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + 1/jC\omega}} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{jC\omega}{R_2 + 1 + jR_2 C\omega}} = 2,7 - 1,0j$

2. On en déduit: $I_e = \sqrt{\frac{P}{\text{Re}(\underline{Z})}} = 13,6\text{A}$

Exercice 23 : Etude énergétique d'un circuit

1. $\frac{U_R}{U_e} = \frac{R \cdot U_e}{R + jL\omega} \Rightarrow P = \frac{U_e^2 \text{Reff}}{R} = \frac{1}{R} \cdot \frac{R^2 \cdot U_e^2}{(R^2 + L^2 \omega^2)} = \frac{R \cdot U_e^2}{(R^2 + 4L^2 \pi^2 f^2)}$

$\frac{dP}{dR} = 0 \Leftrightarrow \frac{U_e^2}{(R^2 + 4L^2 \pi^2 f^2)^2} + \frac{-2R \cdot R \cdot U_e^2}{(R^2 + 4L^2 \pi^2 f^2)^2} = 0$

2. $\Leftrightarrow U_e^2 (R^2 + 4L^2 \pi^2 f^2) = 2R^2 U_e^2$

$\Leftrightarrow R = R_{opt} = 2L\pi f \Rightarrow L = 38\text{mH}$

3. $C = \frac{1}{2L\omega^2} = 133\mu\text{F}$

Exercice 24 : Circuit RLC série alimenté par un GBF

1. Puissance consommée $P = \frac{U_e^2}{\text{Re}(\underline{Z})} = \frac{R \times U_e^2}{(R + R_g)^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$

2. $\frac{dP}{d\omega} = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \omega = \omega_{opt} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

3. $R = R_g$

Exo 25 : Etude d'un transfert de puissance électrique

1. $\underline{Z} = R + jX = 50\Omega + j \cdot 87\Omega = Z_0 \cdot e^{j\alpha} \Rightarrow \begin{cases} Z_0 = \sqrt{R^2 + X^2} = 100\Omega \\ \alpha = \text{Arc tan} \left(\frac{X}{R} \right) = 60^\circ \end{cases}$

2. On a $P_C = V_2 I \cos(\Psi) \Rightarrow I = \frac{P_C}{V_2 \cdot \cos(\Psi)} = 36,4\text{A}$

3. On a $\underline{v}_1 = \underline{v}_2 + \underline{Z} \cdot \underline{i}$, d'où : $V_1 \cdot e^{j\theta} = V_2 + Z_0 \cdot e^{j\alpha} \cdot I \cdot e^{j\psi} = V_2 + Z_0 \cdot I$, et ainsi : $\begin{cases} V_1 = V_2 + Z_0 I = 25,6\text{kV} \\ \theta = 0 \end{cases}$

4. Puissances : $P_G = V_1 I \cos(\Psi) = 466\text{kW}$, $P_C = 400\text{kW}$, et $P_L = R I^2 = 66\text{kW}$, on retrouve le bilan de puissance $P_G = P_C + P_L$, et le rendement : $\eta = P_C/P_G = 86\%$.

Facteur de Puissance

Exercice 26 : Puissance d'un moteur

1. $R = \frac{P}{I_e^2} = 20,4\Omega$ et $Z = \frac{U_e}{I_e} = 31,4\Omega = \sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}$, donc

$L\omega = \frac{1}{\omega} \sqrt{Z^2 - R^2} = 23,9\Omega$ et $L = \frac{1}{\omega} \sqrt{Z^2 - R^2} = 76\text{mH}$

2. $F_P = P/S = \cos \varphi$ (en sinus) = $P / (U_e I_e) = 0,65$

3. Il faut $I_C = C\omega U_e = I_e \sin \varphi \Rightarrow C = \frac{I_e \sin \varphi}{\omega U_e} = 77\mu\text{F}$

4. Intérêt : Moins faire chauffer les lignes EDF... donc moins de pertes inutiles à puissance active égale.

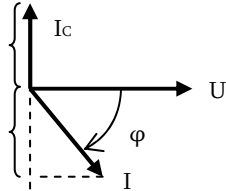
SOLUTION des EXERCICES – EC5 / ME5 – Feuille 3/3

Exercice 27 : Relèvement d'un facteur de puissance

1. Courant dans le moteur : $I_e = \frac{P}{U_e \cdot \cos(\varphi)} = 33,3 A$

2. On a $r = \frac{P}{I_e^2} = 3,97 \Omega$ et $L = \frac{r \tan \varphi}{\omega} = 17 mH$

3. Déjà vu en TD... voir schéma... on peut remettre U et I en phase en compensant la partie complexe de l'impédance, pour tendre vers $P = S$ ($F_p = 1$). Aucun surcoût de conso, car le condensateur ne consomme pas de Puissance active, il ne fait que relever le F_p .



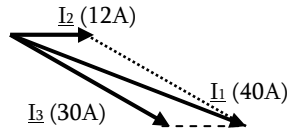
4. Si $F_p = 1$, nouveau courant : $I_e' = \frac{P}{U_e \cdot \cos(0)} = 20 A$ On a

baissé la valeur efficace du courant absorbé, donc les pertes par effet Joule dans la ligne, c'est le C qui fournit le surplus de courant déphasé demandé par le moteur, plus le réseau.

5. Il faut $I_c = I_e \sin(\varphi) = 26,6 A = C \omega U_e$,
donc $C = I_e \sin(\varphi) / \omega U_e = 386 \mu F$.

Exercice 28 : Méthode des 3 ampèremètres

1. Représentation :



2. On mesure sur le schéma, ou on peut calculer :

$$\vec{I}_3 = \vec{I}_1 - \vec{I}_2 \Rightarrow I_3^2 = I_1^2 + I_2^2 - 2I_1 I_2 \cos \varphi$$

et $\cos \varphi = \frac{I_1^2 + I_2^2 - I_3^2}{2I_1 I_2} = 0,88 \Rightarrow \varphi = 28,5^\circ$

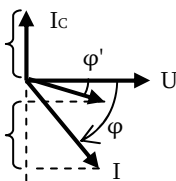
Exercice 29 : Facteur de puissance d'une installation

1. On a $\begin{cases} \underline{e} = E\sqrt{2} \cdot e^{j\omega t} \\ \underline{Z} = R + jL\omega \end{cases} \Rightarrow \underline{i} = \frac{\underline{e}}{\underline{Z}} \quad \varphi = \text{Arg}(E_m) - \text{Arg}(Z)$

D'où $\varphi = -\text{Arc tan}\left(\frac{2L\pi f}{R}\right) = -31,1^\circ$

et $F_p = \cos \varphi = 0,86$

2. Tracé : On a $I = \frac{E}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} = 0,26 A$



Donc : $I_c = I \sin \varphi - I \sin \varphi' = I(\sqrt{1 - \cos^2 \varphi} - \sqrt{1 - \cos^2 \varphi'}) = 80,0 mA$

Et $I_c = C \omega E \Rightarrow C = \frac{I_e (\sin \varphi - \sin \varphi')}{\omega U_e} = 10,6 nF$

Phénomène de Résonance

Exercice 30 : Résonance d'un RLC série

1. Résonance en tension :

1.1. On a $\frac{U_{Cm}}{U_m} = \frac{E_m}{1 + jRC\omega - LC\omega^2} = \frac{E_m}{1 + j\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$

en posant $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \frac{1}{\omega_0 RC} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$

On peut aussi définir la pulsation réduite $x = \omega / \omega_0 \dots$

1.2. Ainsi : $U_{Cm} = |U_{Cm}| = \frac{E_m}{\sqrt{(1-x^2)^2 + x^2/Q^2}}$

1.3. Maximum de $U_{Cm} \rightarrow$ minimum du dénominateur D^2 :

$$\frac{dD^2}{dx} = 0 \Leftrightarrow 2(1-x^2)(-2x) + 2x/Q^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x \left[\frac{1}{Q^2} - 2(1-x^2) \right] = 0$$

2 solutions : $\begin{cases} x = 0 & \text{toujours possible} \\ x = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} & \text{possible si } Q > \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$

2 maxima possibles : $\begin{cases} \omega = 0 \\ \omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} = \omega_0 \sqrt{1 - 2\sigma^2} \end{cases}$

Valeurs : $\begin{cases} U_{Cm}(\omega = 0) = E_m \\ U_{Cm}(\omega = \omega_r) = \frac{Q \cdot E_m}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} \end{cases}$

2. Résonance en courant :

2.1. Intensité complexe : $\underline{I}_m = \frac{U_{Rm}}{R} = \frac{E_m}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}$

2.2. Intensité réelle : $I_m = \frac{E_m}{R \sqrt{1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2}} = \frac{E_m}{RD'}$

2.3. Maximum pour le dénominateur D' minimum :

$$\frac{dD'}{dx} = 0 \Leftrightarrow 2Q^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \left(x - \frac{1}{x}\right) = 2Q^2 x \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega = 0 \\ \omega = \omega_0 \end{cases}$$

Expressions : $\begin{cases} I_m \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 0 \\ I_m(\omega = \omega_0) = \frac{E_m}{R} \quad (\text{constante}) \end{cases}$

2.4. **Résonance en tension** : pas toujours possible (il faut un faible amortissement), peut atteindre des valeurs supérieures à E_m (surtension), la pulsation de résonance et la valeur du maximum dépendent du facteur de qualité Q (selon l'amortissement).

Résonance en courant : toujours possible, mais la valeur atteinte est constante, toujours la même quel que soit le facteur de qualité, il s'agit de E_m/R , il n'y a donc pas de surintensité dans un RLC série. La pulsation de résonance ne dépend pas non plus de Q

Exercice 31 : Résonance en tension d'un circuit RLC

- Sans calculs : on considère les cas limites :
 $\omega \rightarrow 0$: C équivalent à un circuit ouvert, donc $u_s = u_e$.
 $\omega \rightarrow +\infty$: C équivalent à un court-circuit, donc $u_s = 0$.
 Par conséquent le filtre est passe-bas.
- $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ = pulsation de coupure du filtre et $Q = \frac{L\omega_0}{R}$ le facteur de qualité, augmente quand l'amortissement diminue (meilleure qualité \rightarrow plus d'oscillation)
- Transfert : $H(x) = \frac{u_s}{u_e} = \frac{Z_C}{R + Z_C + Z_L} = \dots = \frac{1}{1 - x^2 + jx/Q}$
- Gain : $G = |H(x)| = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2 + (x/Q)^2}}$, idem exo 31

Maximum ? Si le dénominateur est minimum :

$$\frac{dD^2}{dx} = 0 \Leftrightarrow 2(1-x^2)(-2x) + 2x/Q^2 = 0$$

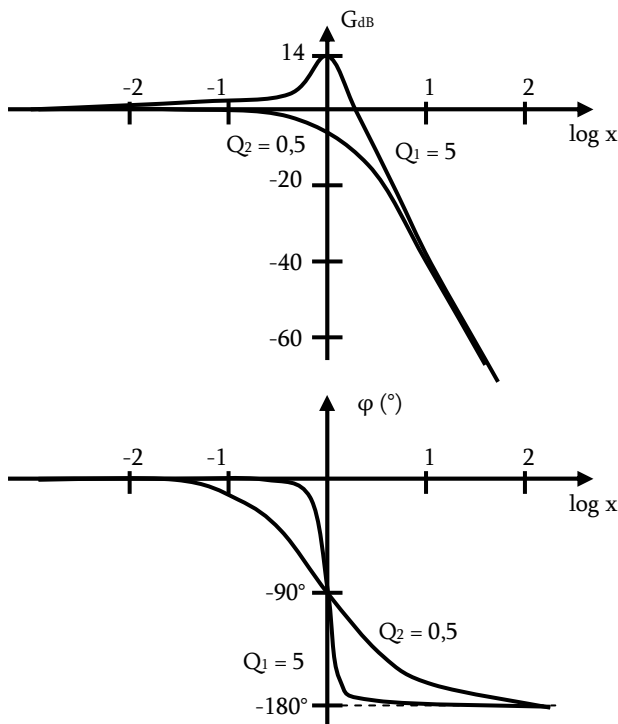
$$\Leftrightarrow 2x \left[\frac{1}{Q^2} - 2(1-x^2) \right] = 0$$

$$2 \text{ solutions : } \begin{cases} x=0 & \text{toujours possible} \\ x = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} & \text{possible si } Q > \frac{1}{\sqrt{2}} = Q_{\text{lim}} \end{cases}$$

$$\text{Valeurs max du gain : } G_{\text{max}} = \frac{Q}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$$

- Bode ? Gain + phase $\varphi = -\text{Arc tan} \left(\frac{x}{Q(1-x^2)} \right)$

Tracer le diagramme de Bode de ce filtre pour $Q_1 = 5$ et $Q_2 = 0,5$.



Exercice 32 : Oscillateur avec excitation sinus

- Allongement $\Delta l(t) = x(t) - x_A(t)$.
- Equation : $\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \omega_0^2 x_A(t)$
- En cplx : $\underline{X} = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \cdot X_A \Rightarrow X = \frac{X_A}{\left| 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right|}$

Exercice 33 : Oscillations forcées dans un liquide

- Equilibre : PFS ... $l_{eq} = l_0 + \frac{m-M}{k} g$.
- Equation : $m\ddot{x} + h\dot{x} + kx = kx_A$
- Résonance : $h > \sqrt{2km}$

Exercice 34 : Système élastique de deux masses

- $m\ddot{S} = F_A(t)$, $S(t) = \frac{-F_0}{m\omega^2} \cos(\omega t)$
- Equation : $\ddot{x}(t) + 2\omega_0^2 x(t) = \frac{-F_0}{m} \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \cos(\omega t)$
- Solution : $X = \frac{F_0}{m} \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \frac{1}{\left| -\omega^2 + 2\omega_0^2 \right|}$