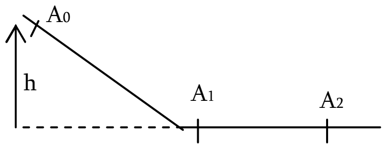
Supplément EXERCICES – ME3 / ME4 – Energétique / Oscillateurs – Feuille 1/3

ME3 – Energétique

Exercice 1 : Frottements

Une particule M de masse m, lâchée en A_0, sans vitesse initiale glisse sans frottements sur un plan incliné suivant A_0A_1.



Calculer la distance d'arrêt $D = A_1A_2$ sachant qu'à partir de A_1 interviennent des frottements de glissement de coefficient f sur le plan horizontal.

Exercice 2 : Jeu de construction

Quelle énergie minimale faut-il fournir pour empiler 10 cubes homogènes de coté a et de masse m initialement éparpillés sur le sol ?

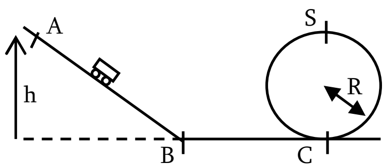
Exercice 3 : Distance de freinage

Une voiture roulant à la vitesse $v_1 = 50 km.h^{-1}$ sur une route plane horizontale a une distance d'arrêt en freinage égale à $d_1 = 40m$.

En supposant que la force de freinage est constante en intensité, déterminer la distance d_2 de freinage pour une vitesse initiale $v_2 = 100 km.h^{-1}$.

Exercice 4 : Circuit automobile pour enfants

Un circuit comporte deux tronçons rectilignes AB et BC. Le premier a pour hauteur h et le second se poursuit par un looping CS de rayon R. La voiturette utilisée est assimilée à un point matériel de masse m. Elle est lâchée sans vitesse initiale. On note g l'intensité du champ de pesanteur et on néglige tous les frottements.



1. Exprimer la vitesse v_B de la vitesse au point B en fonction de g et de h.
2. En supposant qu'il n'y ait aucune discontinuité de la valeur de la vitesse au passage de B, quelle est la vitesse en C ?
3. Exprimer la valeur R_N de la force normale exercée par la piste au sommet S du looping en fonction de m, g, R, et v_S la vitesse au sommet.
4. Exprimer la vitesse v_S en fonction de v_C, g et R.
5. La voiture perd contact avec la piste en S lorsque R_N s'annule. Déterminer, en fonction de R, la valeur h_{min} de la hauteur h pour laquelle la voiturette parvient au sommet du looping.

Exercice 5 : Point lié à un ressort (Calcul d'Ep)

Un point matériel M de masse m est lié à un ressort horizontal de constante de raideur k et de longueur à vide l_0, l'autre extrémité du ressort étant fixe en A. Le point M glisse sans frottement le long de l'axe $(0, \vec{e}_x)$ à partir de sa position d'équilibre située en O.

1. Exprimer la force de rappel élastique $\vec{T}$ exercée par le ressort sur le point M.
2. Déterminer l'énergie potentielle élastique E_P^{Elast} dont dérive cette force pour un allongement x du ressort à partir de sa longueur à vide l_0.
3. Par une analyse énergétique, établir l'équation différentielle du mouvement de M. En déduire la pulsation propre des oscillations.

Exercice 6 : Oscillation d'un système solide-ressort

Un solide ponctuel de masse m est attaché à un ressort horizontal de raideur k dont l'autre extrémité est fixe. Le solide oscille sans frottement entre deux positions extrêmes A et b d'abscisse $x_A = -a$ et $x_B = +a$, symétriques par rapport à la position d'équilibre O prise pour origine du repère. On donne $k = 40 N.m^{-1}$, $a = 2,0 cm$, $m = 100g$.

Commentez les affirmations suivantes :

1. La valeur de la force de rappel $\vec{F}$ du ressort est la même en A et en B et vaut $F = 0,80N$.
2. Le travail entre A et O vaut $W_{A\to O}\left(\vec{F}\right) = -16\, mJ$
3. Le travail entre A et O vaut $W_{A\to O}\left(\vec{F}\right) = +16 mJ$
4. Le travail entre A et B vaut $W_{A\to B}\left(\vec{F}\right) = 2W_{A\to O}\left(\vec{F}\right)$
5. La vitesse de passage du solide en O est $v = 0,40 m.s^{-1}$

Exercice 7 : Rebonds successifs d'une balle

Une balle de caoutchouc de masse m est lachée sans vitesse initiale à une hauteur h_0 du sol. On néglige les forces exercées par l'air devant le poids de la balle.

1. Quelle est sa vitesse v_0 à l'arrivée au sol ?
2. A chaque rebond, la balle perd 10% de son énergie cinétique. Au bout de combien de rebonds la hauteur atteinte au dessus du sol devient-elle inférieure au dixième de la hauteur h_0 ?

Données : $h_0 = 2,0m$ et $g = 10 m.s^{-2}$.

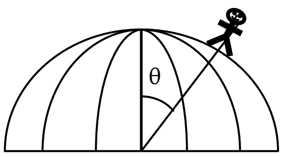
Exercice 8 : Vivre dangereusement

Un alpiniste, de masse m pendule au bout d'une corde de longueur L dans l'espoir d'atteindre une plate-forme voisine. L'angle θ que fait la corde avec la verticale varie au cours du temps et peut atteindre la valeur θ_0 en bout de course. La corde, déjà usée, ne supporte que des tensions inférieures à une valeur T_{lim}. L'alpiniste peut-il espérer rejoindre la plate-forme salvatrice ?

Données : $m = 100kg$, $g = 10 m.s^{-2}$, $\theta_0 = 30°$, $T_{lim} = 4000N$.

Exercice 9 : L'esquimau et son igloo.

Un esquimau de masse m se laisse glisser depuis le haut d'un igloo hémisphérique de rayon R. Sa position sur l'igloo est repérée par l'angle θ avec la verticale.



1. Exprimer la force exercée par l'igloo sur l'esquimau en fonction de m, g, R, θ, et de la vitesse v correspondant à cet angle.
2. A l'aide du théorème de l'énergie cinétique, exprimer la vitesse v en fonction de g, R et θ.
3. Quelle est la valeur de l'angle θ_0 pour lequel l'esquimau perd le contact avec l'igloo ?

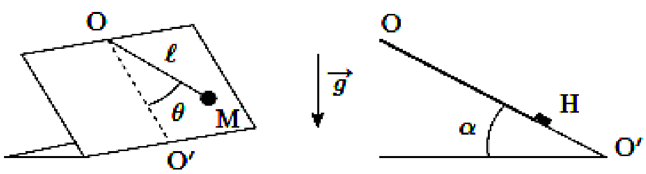
Exercice 10 : Pendule dont le fil casse

Un point matériel M de masse m, attaché à l'extrémité d'un fil inextensible de longueur l dont l'autre extrémité est attaché en un point fixe O, est lâché sans vitesse initiale depuis la position A telle que le fil soit horizontal. Le pendule effectue un quart d'oscillation, puis le fil se rompt alors que le pendule forme un angle $\alpha < \pi/2$ avec la verticale descendante (Oz) et que le point M est en B.

1. Exprimer la norme v_B de la vitesse du point M en B, en fonction de g, l et α.
2. On note S le sommet de la trajectoire parabolique décrite par le point matériel à la suite de la rupture du fil. Exprimer la norme v_S de la vitesse de passage en S.
3. En déduire la différence H entre les altitudes des points A et S, en fonction de l et de α.

Exercice 11 : Pendule sur un plan incliné

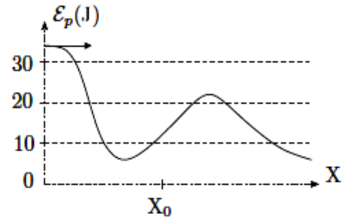
Sur un plan solide incliné d'un angle α par rapport ç l'horizontale, on attache en un point fixe O du plan un fil de longueur l, et on suspend à l'autre extrémité un point matériel M de masse m. La position du pendule ainsi constitué est repérée par l'angle θ(t) formée par le fil avec la ligne OO' de plus grande pente sur le plan incliné. On note H la projection orthogonale du point M sur cette ligne. Les cotes des différents points sont définies par rapport à l'axe vertical ascendant (Oz).



1. Exprimer les énergies cinétiques E_C et potentielle E_P du point M en fonction de θ.
2. En déduire l'équation différentielle du second ordre vérifiée par θ. Quelle est la nature des oscillations de faible amplitude ?

Exercice 12 : Etat accessibles

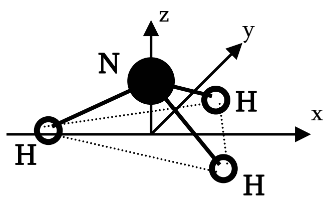
Le graphe ci-dessous représente l'énergie potentielle $E_P(X)$ d'un point matériel dont la position est paramétrée par la variable X telle que X ≥ 0.



1. Placer sur le graphe les valeurs de X correspondantes à des positions d'équilibre. Indiquer si elles sont stables ou instables.
2. A l'instant initial, on a $X(t=0) = X_0$. Sachant que l'énergie mécanique du point matériel vaut E_m = 20J, indiquer sur le graphique le domaine de variation de X possible.

Exercice 13 : L'inversion de la molécule d'ammoniac

Dans un modèle simplifié de la molécule d'ammoniac NH_3, les trois atomes d'hydrogène H forment la base d'une pyramide dont l'azote N de masse m occupe le sommet.



Les trois atomes d'hydrogène sont fixes dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen $\Re_G\left(0;\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z,t\right)$ et définissent le plan (Oxy).

L'atome d'azote est en mouvement suivant l'axe $\left(0;\vec{e}_x\right)$ perpendiculaire au plan des atomes d'hydrogène. Il peut passer de part et d'autres de ce plan et sa cote est notée z.

Le champ de pesanteur est négligeable pour décrire cette structure atomique et la résultante des forces électromagnétiques qui s'exercent sur l'atome d'azote N supposé ponctuel est : $\vec{F} = -\alpha z\left(z^2 - a^2\right)\cdot\vec{e}_z$. Les constantes α et a sont positives.

1. L'origine de l'énergie potentielle est choisie en z = 0. De quelle énergie potentielle E_P la force $\vec{F}$ dérive-t-elle ? Représenter graphiquement E_P lorsque z varie de -∞ à +∞.
2. Définir la condition générale de stabilité d'un équilibre et déterminer les positions d'équilibres stables et instables de l'atome d'azote.
3. Une énergie $\Delta E \leq \frac{1}{4}\alpha a^4$ est cédée au système au moment où l'atome d'azote est dans une position d'équilibre stable. Montrer graphiquement que l'atome d'azote va osciller entre deux valeurs limites z_1 et z_2. Déterminer la fréquence des petites oscillations.
4. Que se passe-t-il si l'énergie cédée $\Delta E > \frac{1}{4}\alpha a^4$?

ME4 – Oscillateur Part 1

Exercice 14 : Expédition à Cayenne

Lors de l'expédition de l'Académie des Sciences en Guyane en 1672, on s'aperçut que la longueur du pendule à secondes utilisé à Cayenne devait être diminué de 2,8mm par rapport à sa longueur à Paris, qui était de 993,9mm.

1. Montrer que ce résultat pouvait être interprété comme une conséquence de l'aplatissement terrestre.
2. Calculer la valeur de l'intensité de la pesanteur à Cayenne, sachant que sa valeur à Paris est de 9,81m.s^{-2}.

Exercice 15 : Oscillations verticales dues à un choc

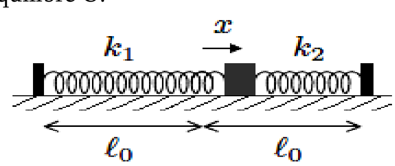
Une bille M de masse m = 200g est suspendue à un ressort de longueur à vide l_0 et de constante de raideur k. A l'équilibre, le ressort est allongé de Δl_{eq} = 5cm. Un choc vertical orienté vers le haut communique alors à la bille une vitesse v_0. La bille remonte de h = 2cm et se met à osciller.

1. Exprimer puis calculer la constante de raideur k.
2. Déterminer en fonction de h et des données la vitesse initiale v_0 communiquée à la bille lors du choc. La calculer.
3. Quel est l'allongement maximal Δl_{max} du ressort au cours des oscillations de la bille ?

Exercice 16 : Système de deux ressorts

Un solide de masse m, relié à deux ressorts identiques R_1 et R_2 dont les autres extrémités sont fixes, peut se déplacer sans frottements sur un rail horizontal. Chacun des ressorts, de masse négligeable devant celle du solide, est caractérisé par un raideur k et une longueur à vide L_0. Celle-ci est inférieur à la longueur a des ressorts à l'équilibre.

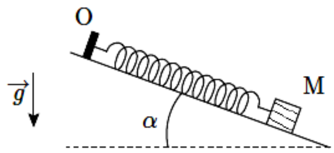
On déplace légèrement le solide vers la droite et on le lâche sans vitesse initiale. La position du solide, assimilé à un point matériel est repérée par son abscisse x, comptée depuis sa position d'équilibre O.



1. Etablir l'équation différentielle en x du mouvement dans le cas où il n'y a aucun frottement.
2. A quel système mécanique plus simple le système est-il équivalent ?
3. En réalité, le solide subit de la part de l'air une force de frottement fluide : $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$ opposée à son vecteur vitesse. Etablir la nouvelle équation différentielle en x.

Exercice 17 : oscillateur incliné

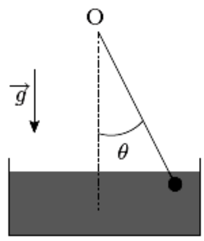
Un point matériel M de masse est relié à l'extrémité d'un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide l_0, attaché à un point fixe O. L'ensemble est placé sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. Les frottements sont négligés.



1. Exprimer la longueur l_{eq} du ressort lorsque le point M est à l'équilibre.
2. On pose $x(t) = l(t) - l_{eq}$, où l(t) est la longueur instantanée du ressort. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par x lorsque la masse m est en mouvement. Que remarque-t-on ?

Exercice 18 : Mesure de la viscosité d'un milieu

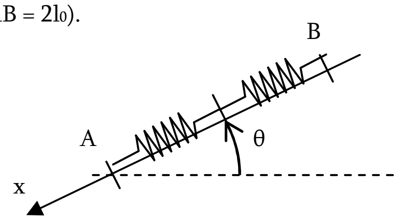
Une sphère de masse m et de rayon r, assimilée à un point matériel, est attachée à l'extrémité d'un fil de longueur l. Elle peut osciller dans un milieu liquide dans lequel elle subit une force de frottement fluide $\vec{f} = -6\pi\eta r \cdot \vec{v}$, où $\vec{v}$ est la vitesse de la sphère et η la viscosité du milieu. La position de la sphère est repérée par l'angle θ entre le fil et la verticale descendante. On néglige la poussée d'Archimède devant les autres forces mises en jeu et on suppose que le fil reste constamment tendu.



1. Déterminer l'équation différentielle du mouvement par une méthode énergétique
2. Dans le cas d'oscillations de faible amplitude, exprimer la pseudo-pulsation.
3. En déduire l'expression de η en fonction de la pseudo-période T, de la période propre T_0 et des autres données. En déduire une manière de mesurer cette viscosité.
4. Proposer une autre méthode de mesure de la viscosité et écrire les équations correspondantes

Exercice 19 : Oscillation autour d'un équilibre

Un point matériel M de masse m glisse avec un frottement fluide $-h\vec{v}$ le long d'un plan incliné d'angle θ, sur un axe x. Il est attaché à deux ressorts identiques (raideur k, longueur au repos l_0) dont les extrémités sont fixées aux point A et B (AB = $2l_0$).



1. Déterminer l'abscisse x_e du point d'équilibre

2. On place l'origine en ce point d'équilibre. Quelle est l'équation du 2nd ordre satisfaite par l'abscisse x(t) lorsqu'il n'y a pas de frottement ? (la déterminer par une méthode énergétique)

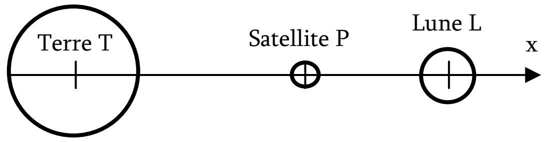
3. Quelle est l'expression de x(t) si on place initialement le point sur la position d'équilibre et si on lui communique une vitesse initiale v_0 vers le haut (toujours sans frottement).

4. Et si on ne néglige plus le frottement fluide $-h\vec{v}$? Modifier l'équation vérifiée par x et définir le facteur de qualité Q

5. Déterminer l'expression de x(t) dans le cas d'un faible amortissement.

Exercice 20 : Point d'équigravité

Un solide assimilé à un point matériel P de masse m est situé sur l'axe Terre-Lune à la distance x du centre T de la Terre. On note d = 3,84.10^5 km la distance TL (L centre de la Lune). On note M_T = 5,97.10^{24} kg et $M_L = M_T/81$ les masses de la Terre et de la Lune. L'action gravitationnelle exercée par la Terre (ou la Lune) sur le point matériel s'obtient en concentrant toute la masse M_T (ou M_L) au centre.



1. Quelle est la force gravitationnelle résultante F(x) exercée sur P ?

2. Déterminer la distance x_e du point d'équigravité E où le point matériel se trouve en équilibre

3. Cet équilibre est-il stable ?

4. Calculer les énergies potentielles desquelles dérivent chacune de ces forces

5. Redémontrer par cette méthode énergétique la nature de l'équilibre.

Exercice 21 : Etude d'une énergie potentielle

Un point matériel est en mouvement le long de l'axe (Ox), il est soumis à une force $\vec{F}$ conservative dont l'expression de l'énergie potentielle est :

$$E_p(x) = \frac{1}{2}kx^2 + kl_0\left(h - \sqrt{x^2 + l^2}\right)$$

1. Représenter graphiquement la fonction $E_p(x)$. Puis déterminer graphiquement les positions d'équilibre.

2. Déterminer, par le calcul, les positions d'équilibre du système.

3. Le rapport h/l_0 influence-t-il le nombre de positions d'équilibre ?

4. Parmi ces positions, quelles sont celles qui sont stables ou instables ?

5. Retrouver l'expression de la force $\vec{F}$ auquel est soumis le point matériel.

6. Ce point matériel est de masse m. Donner l'équation différentielle du mouvement.

Exercice 22 : Frottement solide

Un solide parallélépipédique de masse m, assimilé à un point matériel M, est attaché à l'extrémité d'un ressort de longueur à vide l0 et de constante de raideur k. Cet objet peut glisser sur un support plan horizontal. Lorsque la masse glisse, la force de frottement engendrée est d'intensité constante F. A l'instant t = 0, le ressort étant étiré d'une longueur d, on lâche la masse m sans vitesse initiale. On suppose que celle-ci se met alors en mouvement. La position de M est repérée par son abscisse x(t) mesurée par rapport au point où le ressort est non étiré. On pose $T_0 = 2\pi\sqrt{m/k}$.

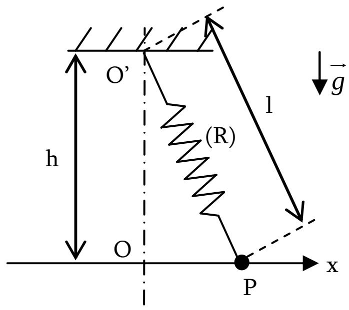
1. Déterminer la loi horaire x(t) du mobile pour $0 \le t \le t_1$, où t_1 est la première date à laquelle sa vitesse s'annule

2. Déterminer l'expression de la date t_1 en fonction de T_0, ainsi que l'abscisse x_1 à cette date.

3. Sachant que pour que le solide se mette à glisser à partir d'une vitesse nulle, il faut que la traction soit supérieure à une valeur seuil (correspondant au cône de frottement), dessiner l'allure de la courbe x(t) pour x > 0.

Exercice 23 : Equilibre stable ou instable ?

Le référentiel terrestre $\Re_G\left(0;\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z,t\right)$ est supposé galiléen. Une particule P, de masse m ne peut déplacer que suivant l'axe horizontal (Ox), sans frottements. P est aussi attaché à un ressort (R) de raideur k et de longueur au repos l_0, dont l'autre extrémité est fixée en O' (OO' = h).



1. Que peut-on dire de l'énergie potentielle de pesanteur de P ?

2. Exprimer l'énergie potentielle E_p totale de P en fonction du paramètre x et des données.

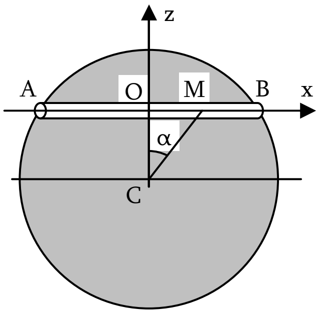
3. A partir du tableau de variation, en déduire le graphe représentatif de la fonction $E_P(x)$. On distinguera les cas où $h > l_0$ et $h < l_0$.

4. En déduire l'existence et la nature des points d'équilibre du point P.

Exercice 24 : Tunnel terrestre

La Terre est supposée sphérique de centre C et de rayon R = 6400km. Pour relier 2 villes A et B, un tunnel est foré au travers du globe terrestre en ligne droite. Un point matériel M de masse m part sans vitesse initiale du point A et glisse dans le tunnel sans frottement suivant l'axe $(0, \vec{e}_x)$ pour rejoindre le point B. Lorsque 'il est situé à l'intérieur de la Terre à la distance r = CM du centre C, la Terre exerce sur M une force d'attraction dirigée vers C et de valeur $\vec{f} = -mg_0 \frac{r}{R}\vec{u}_r$, avec $\vec{u}_r = \frac{\overrightarrow{CM}}{CM}$, et $g_0 = 10 m.s^{-2}$ le champ de pesanteur à la surface. La distance $\|\overrightarrow{CO}\|$ du tunnel au centre de la Terre est notée d.

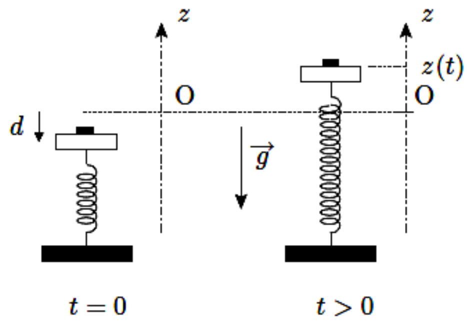
1. Quelle est l'énergie potentielle de gravitation E_P^{GRAV} associée au point M en choisissant l'origine de cette énergie en O. En déduire la vitesse maximale v_{max} du mobile. Le point M possède-t-il une position d'équilibre stable ?



2. Déterminer la nature et l'équation horaire x(t) du mouvement de M. Retrouver l'expression de v_{max}.
3. Calculer numériquement le temps T nécessaire au mobile pour revenir en A.

Exercice 25 : Décollement d'une masse

Un point matériel M de masse m est posé sur un plateau horizontal de masse m', lui-même attaché à un ressort vertical de longueur à vide l_0 et de constante de raideur k. On suppose que l'ensemble est astreint à se déplacer uniquement suivant la verticale. A l'instant t = 0, l'ensemble étant à l'équilibre, on appuie sur le plateau qui se déplace vers la bas d'une distance d, et on le lâche sans vitesse initiale. On repère la position de la masse et du plateau par la cote z(t) mesurée sur un axe vertical ascendant (Oz) ayant pour origine la position à l'équilibre.



1. Exprimer l'allongement algébrique Δl_{eq} du ressort lorsque l'ensemble est à l'équilibre.
2. En supposant le contact entre la masse et la plateau maintenu, établir l'équation différentielle vérifiée par z. En déduire la loi horaire z(t).
3. Exprimer alors la réaction $\vec{R}$ exercée par le plateau sur la masse m.
4. En déduire à quelle condition sur d la masse ne décollera pas du plateau au cours du mouvement.

SOLUTION des EXERCICES – ME3 / ME4 – Feuille 1/3

ME3 – Energétique

Exercice 1 : Frottements

1ère étape : Entre A_0 et A_1 – Pas de frottement → Conservation de l'énergie mécanique

$$E_{m0} = E_{c0} + E_{p0} = mgh = E_{m1} = \frac{1}{2}mv_1^2$$

2ème étape : A partir de A_1, l'énergie mécanique diminue jusqu'à s'annuler en A_2

TEC appliqué à la particule M dans $\Re_G$ supposé galiléen

2 forces : $\begin{cases} \rightarrow \vec{P} = -mg\cdot\vec{e_z} & \text{→ Ne travaille pas} \\ \rightarrow \vec{R} = \vec{R_N} + \vec{R_T} = +mg\cdot\vec{e_z} - mfg\cdot\vec{e_x} & \text{→ Travaille} \end{cases}$

TEC : $\Delta E_C = 0 - \frac{1}{2}mv_1^2 = W_{\vec{R_T}} = -mfgD$

Donc : $mgh = mfgD$ et ainsi $\boxed{D = \frac{h}{f}}$

Exercice 2 : Jeu de construction

Travail à fournir pour compenser le travail du poids (mis sous forme d'énergie potentielle). On compare ces énergies :

Tous les cubes éparpillés, leur centre de gravité étant tous à a/2 :

$$E_P = 10\left(\frac{mga}{2}\right) = 5mga$$

Tous les cubes empilés, le centre de gravité étant à 5a :

$$E_P = (10m)\,g\,(5a) = 50mga$$

Il faut fournir la différence $\boxed{\Delta E_P = 45mga}$...

Exercice 3 : Distance de freinage

$$\left\{\begin{array}{l} \Delta E_{C1} = -\frac{1}{2}mv_1^2 = -Fd_1 \\ \Delta E_{C2} = -\frac{1}{2}mv_2^2 = -Fd_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{d_2 = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 d_1 = 4d_1 = 160m}$$

Exercice 4 : Circuit automobile pour enfants

1. Conservation $E_m = mgh = \frac{1}{2}mv^2$ $\boxed{\Rightarrow v = \sqrt{2gh}}$

2. Pas de frottement / route plane → Même vitesse en C qu'en B

3. PFD : $\vec{P} + \vec{R_N} = m\vec{a} = \begin{bmatrix} -mR\dot{\theta}^2 \\ mR\ddot{\theta} \end{bmatrix}_{POL} = \begin{bmatrix} -\frac{mv^2}{R} \\ mR\ddot{\theta} \end{bmatrix}_{POL}$ et au sommet, tous est vers le bas : $\boxed{R_N = \frac{mv^2}{R} - mg = m\left(\frac{v_S^2}{R} - g\right)}$

4. TEM : $E_m = \frac{1}{2}mv_C^2 + mgz_C = \frac{1}{2}mv_S^2 + mgz_S$

Et $\boxed{v_S = \sqrt{v_C^2 + 2g\,(z_C - z_S)} = \sqrt{v_C^2 - 4gR}}$

5. $R_{N\_S} = 0 \Leftrightarrow v_S^2 = gR \Leftrightarrow v_C^2 = 5gR = 2gh$ $\boxed{\Leftrightarrow h_{\min} = \frac{5R}{2}}$

Exercice 5 : Point lié à un ressort (Calcul d'Ep)

1. $\vec{T} = -k(x - l_0)\vec{e_x}$

2. On a en 1D : $F(x) = \frac{-dE_P^{Elast}}{dx}$

Donc $E_P^{Elast} = \int k(x-l_0)\,dx = \boxed{E_P^{Elast} = \frac{1}{2}k(x-l_0)^2 + C}$

3. Bilan d'énergie : $E_m = E_C + E_P = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k(x-l_0)^2$

Et on dérive $\frac{dE_m}{dt} = m\dot{x}\ddot{x} + k(x-l_0)\dot{x} = \frac{\delta W_{NC}}{dt} = 0$

D'où : $\boxed{m\ddot{x} + kx = kl_0}$

Exercice 6 : Oscillation d'un système solide-ressort

1. Vrai… faire la calcul $\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{e_x}$.

2. et 3. $W_{A\to O}\left(\vec{F}\right) = \pm 16\,mJ$ → Faux, car la force n'est pas constante, le plus simple pour le calculer est de passer par l'E_P :

$W_{A\to O}\left(\vec{F}\right) = -\Delta E_P = \frac{1}{2}kx_A^2 - \frac{1}{2}kx_O^2 = 8{,}0\,mJ$, et attention au signe, force motrice, travail positif…

4. Faux, entre A et B : $W_{A\to B}\left(\vec{F}\right) = -\Delta E_P = 0$

5. Vrai : conservation de l'Em : $E_m = \frac{1}{2}ka^2 = \frac{1}{2}mv^2$

Ce qui donne $v = a\sqrt{\frac{k}{m}} = 0{,}40\ m.s^{-1}$

Exercice 7 : Rebonds successifs d'une balle

1. Conservation de l'énergie méca ... $\boxed{v = \sqrt{2gh_0} = 6{,}3m.s^{-1}}$

2. Après le rebond n : $(0{,}9)^n\,mgh_0 = mgh_n$

On veut $h_n = (0{,}9)^n h_0 < \frac{h_0}{10}$ $\boxed{\Rightarrow n > \frac{\ln(0{,}1)}{\ln(0{,}9)} = 21{,}85 \to 22}$

Exercice 8 : Vivre dangereusement

Besoin du PFD pour connaitre la tension du fil, on la projette sur la direction radiale :

$$\Rightarrow T = mg\cos\theta + ma_N = mg\cos\theta + \frac{mv^2}{L}$$

La tension est maximale en bas : A. Il faut connaître la vitesse en bas correspondant à la position extrême θ_0 notée B : TEM

$$E_m = \frac{1}{2}mv_A^2 + mgz_A = 0 + mgz_B$$

Donc $v_A^2 = 2g\,(z_B - z_A) = 2gL\,(1 - \cos\theta_0)$

Ainsi :

$$\boxed{\Rightarrow T_{\max} = mg + \frac{mv_A^2}{L} = mg + 2mg\,(1 - \cos\theta_0) = 1300N}$$

Ce qui est inférieur à la limite supportée, la corde résiste.

Exercice 9 : L'esquimau et son igloo.

1. PFD R galiléen (idem pendule) :

$$\vec{P}+\vec{R_N}=\begin{bmatrix}-mg\cos\theta\\ mg\sin\theta\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}R_N\\ 0\end{bmatrix}=m\vec{a}=m\begin{bmatrix}-R\dot{\theta}^2\\ R\ddot{\theta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\dfrac{mv^2}{R}\\ mR\ddot{\theta}\end{bmatrix}_{POL}$$

$$\boxed{\Rightarrow R_N = mg\cos\theta-\frac{mv^2}{R}}$$

2. TEC :

$$\Delta E_C=\frac{1}{2}mv^2-0=W_{\vec{P}}+\cancel{W_{\vec{R_N}}}=-\Delta E_P=mgR(1-\cos\theta)$$

Ainsi, on obtient $\boxed{v^2=2gR(1-\cos\theta)}$

3. Perte de contact : $R_N=0 \Leftrightarrow mg\cos\theta-\dfrac{mv^2}{R}=0$

Ou encore : $mg\cos\theta_0-2mg(1-\cos\theta_0)=0$

Cela donne $\boxed{\cos\theta_0=\dfrac{2}{3} \quad \Rightarrow \theta_0=Ar\cos\left(\dfrac{2}{3}\right)=48°}$

Exercice 10 : Pendule dont le fil casse

1. TEM … $\boxed{\Rightarrow v_B=\sqrt{2gl\cos\alpha}}$
2. Après la rupture du fil, la vitesse horizontale va se conserver : $v_B\cos\alpha$, alors que la vitesse verticale $v_B\sin\alpha$ va être atténuée par le poids, s'annuler au sommet, et devenir négative. Ainsi au sommet il ne reste que la vitesse horizontale : $\boxed{v_S=v_B\cos\alpha\,.}$
3. On a $\begin{cases} mgz_A+0=mgz_B+\dfrac{1}{2}mv_B{}^2\\ mgz_S+\dfrac{1}{2}mv_B{}^2\cos^2\alpha=mgz_B+\dfrac{1}{2}mv_B{}^2\end{cases}$

Donc $\boxed{H=z_A-z_S=\dfrac{v_B{}^2\cos^2\alpha}{2g}=R\cos^3\alpha}$

Exercice 10 : Pendule sur un plan incliné

1. Energies : $\boxed{E_C=\dfrac{1}{2}mv^2=\dfrac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2}$ et $\boxed{E_P=-mgl\cos\theta\sin\alpha.}$

2. $\dfrac{dE_m}{dt}=\dfrac{d}{dt}(E_C+E_P)=0$ car pas de frottements

$$ml^2\dot{\theta}\cdot\ddot{\theta}+mgl\dot{\theta}\sin\theta\sin\alpha=0$$

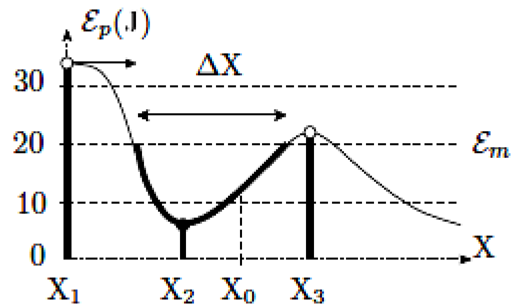
On simplifie : $\boxed{\ddot{\theta}+\dfrac{g\sin\alpha}{l}\cdot\sin\theta=0 \quad \omega_0=\sqrt{\dfrac{g\sin\alpha}{l}}}$

Pour de petites oscillations, on retrouve un oscillateur harmonique non amorti → Oscillations sinusoïdales

Exercice 12 : Etat accessibles

1. Position d'équilibre : dérivée nulle ⇔ tangente horizontale. Ici, 3 positions d'équilibre : X_1 et X_3 stables, X_2 stable

2. Position accessibles en dessous de 20J → Etat lié.



Exercice 13 : L'inversion de la molécule d'ammoniac

1. Force 1D : $F(z)=\dfrac{-dE_P}{dz}=-\alpha z(z^2-a^2)$

On intègre : $E_P=\int\alpha z(z^2-a^2)dz=\dfrac{\alpha}{4}z^4-\dfrac{\alpha a^2}{2}z^2=\boxed{\dfrac{1}{4}\alpha z^2(z^2-2a^2)}$

Représentation… Fonction paire

z :	$-\infty$	$\rightarrow$	$-a$	$\rightarrow$	0	$\rightarrow$	a	$\rightarrow$	$+\infty$
E_P :	$+\infty$	$\searrow$	$\dfrac{-\alpha a^2}{4}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$\dfrac{-\alpha a^2}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$
$\dfrac{dE_P}{dz}$:	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$

2. Position d'équilibre $\dfrac{dE_P}{dz}=0 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} z=\pm a\\ z=0\end{cases}$

Stable : $\dfrac{d^2E_P}{dz^2}>0$ (en +a/-a) ou instable $\dfrac{d^2E_P}{dz^2}<0$ (en 0).

3. Si $\Delta E\le\dfrac{1}{4}\alpha a^4$, état lié, l'azote oscille autour de la position d'équilibre. On met l'énergie sous une forme que l'on va intégrer pour retrouver l'équation du mouvement. (développement limité à l'ordre 2)

$$E_P=E_P(z_{eq})+\underbrace{\cancel{\left(\frac{dE_P}{dz}\right)_{z_{eq}}}}_{=0\,(\acute{e}quilibre)}(z-z_{eq})+\underbrace{\left(\frac{d^2E_P}{dz^2}\right)_{z_{eq}}}_{=2\alpha a^2}\frac{(z-z_{eq})^2}{2}+\ldots$$

On pose $Z=(z-z_{eq}) \quad \Rightarrow \dot{Z}=\dot{z}$

Energie méca : $E_m=E_C+E_P=\dfrac{1}{2}m\dot{Z}^2+E_{P0}+\alpha a^2Z^2$

On dérive (pas de frottements) : $\dfrac{dE_m}{dt}=0=m\dot{Z}\cdot\ddot{Z}+2\alpha a^2Z\cdot\dot{Z}$

L'équation est : $m\ddot{Z}+2\alpha a^2Z=0$ de pulsation $\boxed{\omega_0=\sqrt{\dfrac{2\alpha a^2}{m}}}$

4. Si $\Delta E>\dfrac{1}{4}\alpha a^4$, l'azote peut passer la barrière en z = 0, mais elle est bloquée dans un double puits de potentiel. Elle subit à chaque passage un renversement en « parapluie »

SOLUTION des EXERCICES – ME3 / ME4 – Feuille 2/3

ME4 – Oscillateurs Part 1

Exercice 14 : Expédition à Cayenne

1. Période propre oscillateur $T_0=\frac{2\pi}{\omega_0}=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. Si l'on doit diminuer L, cela signifie que g est plus faible donc que Cayenne est plus loin du centre de la Terre que Paris
2. Après raccourcissement, les période sont les mêmes, donc $\frac{L_C}{g_C}=\frac{L_P}{g_P}$ et ainsi $\boxed{g_C=g_P\times\frac{L_C}{L_P}=9{,}78\,m.s^{-2}}$

Exercice 15 : Oscillations verticales dues à un choc

1. PFS… $\boxed{k=\frac{mg}{\Delta l_{eq}}=39{,}2\ N.m^{-1}}$
2. Conservation Em : $\frac{1}{2}k\left(\Delta l_{eq}-h\right)^2+mgh=\frac{1}{2}k\left(\Delta l_{eq}\right)^2+\frac{1}{2}mv_0^{\ 2}$

   Donc : $\boxed{v_0=\sqrt{\frac{k}{m}\left[\left(\Delta l_{eq}-h\right)^2-\left(\Delta l_{eq}\right)^2\right]+2gh}=28cm.s^{-1}}$
3. Allongement maximal $\boxed{\Delta l_{\max}=\Delta l_{eq}+h=7cm}$

Exercice 16 : Système de deux ressorts

1. Deux tensions : $\begin{cases}\overrightarrow{T_1}=-k_1\left(a+x-L_0\right)\overrightarrow{e_x}\\ \overrightarrow{T_2}=+k_2\left(a-x-L_0\right)\overrightarrow{e_x}\end{cases}$

   PFD : $\vec{P}+\overrightarrow{R_N}+\overrightarrow{T_1}+\overrightarrow{T_2}=m\vec{a}=m\ddot{x}\cdot\overrightarrow{e_x}$

   Eq diff : $\boxed{\ddot{x}+\frac{k_1+k_2}{m}\cdot x=0}\quad\Rightarrow\omega_0=\sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}}$
2. Equivalent à un ressort unique de raideur k_1+k_2
3. On rajoute la force f : $\vec{P}+\overrightarrow{R_N}+\overrightarrow{T_1}+\overrightarrow{T_2}+\vec{f}=m\ddot{x}\cdot\overrightarrow{e_x}$, ce qui donne : $\boxed{\ddot{x}+\frac{\alpha}{m}\dot{x}+\frac{k_1+k_2}{m}\cdot x=0}$

Exercice 17 : oscillateur incliné

1. PFS … $\boxed{l_{eq}=\frac{mg\sin\alpha}{k}+l_0}$
2. PFD … $\boxed{\ddot{x}+\frac{k}{m}x=0}$ → Idem sans le plan incliné

Exercice 18 : Mesure de la viscosité d'un milieu

1. PFD ou énergie … $\boxed{\ddot{\theta}+\frac{6\pi\eta r}{m}\dot{\theta}+\frac{g}{l}\sin\theta=0}$
2. Pulsation $\left.\begin{cases}\omega_0=\sqrt{\frac{g}{l}}\\ \sigma=\frac{6\pi\eta r}{2m\omega_0}\end{cases}\right\}\boxed{\Rightarrow\omega_P=\omega_0\sqrt{1-\sigma^2}=\sqrt{\frac{g}{l}-\left(\frac{3\pi\eta r}{m}\right)^2}}$
3. On retourne : $\boxed{\eta=\frac{2m}{3r}\sqrt{\frac{1}{T_0^2}-\frac{1}{T^2}}}$
4. On mesure m et r de la sphère / T dans le liquide / T_0 dans l'air → On en déduit la viscosité du liquide

Exercice 19 : Oscillation autour d'un équilibre

1. PFS : $\vec{P}+\overrightarrow{R_N}\cancel{-\alpha\vec{v}}+\overrightarrow{T_1}+\overrightarrow{T_2}=\vec{0}$

   Projeté sur x : $mg\sin\alpha-k\left(AM-l_0\right)+k\left(MB-l_0\right)=0$

   Et avec $MB=2l_0-AM$ $\boxed{\Rightarrow AM=l_{eq}=l_0+\frac{mg\sin\alpha}{2k}}$
2. PFD : $mg\sin\alpha-k\left(l_{eq}+x-l_0\right)+k\left(l_0-l_{eq}-x\right)=0$ (projeté sur x). On injecte alors la position d'équilibre : $\boxed{m\ddot{x}+2kx=0}$

   Ou méthode énergétique : Avec un bilan d'énergie

   $$E_m=2\times\frac{1}{2}k\left(l_{eq}+x-l_0\right)^2-mgx\sin\alpha+\frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

   $$\frac{dE_m}{dt}=2k\left(x+l_{eq}-l_0\right)\cdot\dot{x}-mg\cdot\dot{x}\sin\alpha+m\ddot{x}\cdot\dot{x}=P_{NC}=0$$

   Ainsi, on retrouve $\boxed{m\ddot{x}+2kx=0}$
3. On pose $\omega_0=\sqrt{k/m}$, alors :

   $x(t)=A\cos\left(\omega_0 t\right)+B\sin\left(\omega_0 t\right)\quad,A,B\in\mathbb{R}$

   CI : $\begin{cases}x(0)=0=A\\ \dot{x}(0)=-v_0=B\omega_0\end{cases}$ $\boxed{\Rightarrow x(t)=\frac{-v_0}{\omega_0}\sin\left(\omega_0 t\right)}$
4. PFD : avec frottement : $\boxed{m\ddot{x}+\alpha\dot{x}+2kx=0}$

   Ou méthode énergétique : $\frac{dE_m}{dt}=P_{NC}=-\alpha\dot{x}^2$

   Sous forme canonique avec Q : $\ddot{x}+\frac{\omega_0}{Q}\dot{x}+\frac{2k}{m}x=0$

   Donc $\frac{\omega_0}{Q}=\frac{\alpha}{m}$ $\boxed{\Rightarrow Q=\frac{m\omega_0}{\alpha}=\frac{\sqrt{2km}}{\alpha}}$
5. On pose $\begin{cases}\omega_0=\sqrt{k/m}\\ \sigma=\alpha/2m\omega_0\end{cases}$, si a priori σ < 1, on est en régime pseudo-périodique, avec $\omega_P=\omega_0\sqrt{1-\sigma^2}$:

   $x(t)=e^{-\sigma\omega_0 t}\left(A\cos\left(\omega_P t\right)+B\sin\left(\omega_P t\right)\right)\quad,A,B\in\mathbb{R}$

   $\begin{cases}x(0)=0=A\\ \dot{x}(0)=-v_0=-\sigma\omega_0 A+B\omega_P\end{cases}$ $\boxed{\Rightarrow x(t)=\frac{-v_0}{\omega_P}e^{-\sigma\omega_0 t}\sin\left(\omega_P t\right)}$

Exercice 20 : Point d'équigravité

1. Force sur P : $\boxed{F(x)=F_T+F_L=\frac{-GM_Tm}{x^2}+\frac{GM_Lm}{\left(TL-x\right)^2}}$
2. Point d'équigravité : $F(x)=0\quad\Leftrightarrow\frac{M_T}{x^2}=\frac{M_L}{\left(TL-x\right)^2}$

$$\left(\frac{TL-x}{x}\right)^2=\frac{M_L}{M_T}\quad\Leftrightarrow\frac{TL-x}{x}=\pm\sqrt{\frac{M_L}{M_T}}\quad\Leftrightarrow x=\frac{TL}{\left(1\pm\sqrt{\frac{M_L}{M_T}}\right)}$$

2 position d'équilibre : 1 entre T et L, une autre absurde après L, absurde car l'expression que l'on a donnée pour la force de L n'est valable que pour $x_P<x_L$ (P à gauche de L)

Ainsi : La position d'éq $\boxed{x=\frac{d}{\left(1+\sqrt{\frac{M_L}{M_T}}\right)}=3{,}46.10^5\,km}$

3. Du point de vue des forces : si $x_P \searrow$, alors F_T augmente et F_L diminue, donc le point est encore plus attiré par la Terre $\boxed{\rightarrow \text{L'équilibre est INSTABLE}}$ (idem dans l'autre sens

4. On a $\begin{cases} F_T = \dfrac{-GM_T m}{x^2} \Rightarrow E_P{}^T = \int -F_T(x)\,dx = \dfrac{-GM_T m}{x} + \cancel{C_T} \\ F_L = \dfrac{GM_L m}{(TL-x)^2} \Rightarrow E_P{}^L = \dfrac{GM_T m}{(x-TL)} + \cancel{C_L} \end{cases}$

5. Stabilité ? $\dfrac{d^2E_P}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}\left(-F(x)\right) = \dfrac{-2GM_T m}{x^3} + \dfrac{GM_L m}{(x-TL)^3}$

On cherche son signe : $\dfrac{d^2E_P}{dx^2} = -\left|\dfrac{2GM_T m}{x^3}\right| - \left|\dfrac{GM_L m}{(x-TL)^3}\right| < 0$

$\boxed{\text{L'équilibre est INSTABLE}}$ (méthode énergétique)

Exercice 21 : Etude d'une énergie potentielle

1. Petits calculs préliminaires :

$$\begin{cases} E_p(x) = \dfrac{1}{2}kx^2 + kl_0\left(h - \sqrt{x^2+h^2}\right) \\ \dfrac{dE_p}{dx} = kx - kl_0\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+h^2}} = kx\left(1 - \dfrac{l_0}{\sqrt{x^2+h^2}}\right) \end{cases}$$

Et $\dfrac{dE_p}{dx} = 0 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = l_0{}^2 - h^2 \end{cases}$

Cas $l_0 > h$: 3 positions d'équilibre possibles

x	$-\infty$		$x=-\sqrt{l_0{}^2-h^2}$		0		$x=\sqrt{l_0{}^2-h^2}$		$+\infty$
$\dfrac{dE_P}{dx}$		-	0	+	0	-	0	+	
E_P		↘		↗		↘		↗	
			Eq stable		Eq instable		Eq stable		

Cas $l_0 < h$: 1 seule position d'équilibre possible

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\dfrac{dE_P}{dx}$		-	0	+	
E_P		↘		↗	
			Equilibre stable		

2. Positions d'équilibre du système (voir ci-dessus).
3. Oui : 3 positions si $h/l_0 < 1$, et 1 seule si $h/l_0 > 1$.
4. Voir tableau de variations (on peut calculer d^2E_P/dX^2)
5. Force correspondante : $\vec{F} = \dfrac{-dE_p}{dx} = -kx\left(1 - \dfrac{l_0}{\sqrt{x^2+h^2}}\right)\vec{e_x}$.
6. PFD : $\left(-\vec{F} + m\vec{a}\right)\cdot\vec{e_x} = \quad m\ddot{x} + kx\left(1 - \dfrac{l_0}{\sqrt{x^2+h^2}}\right) = 0$

Exercice 22 : Frottement solide

1. Méthode complète d'étude :

→ Référentiel $\Re_G\left(0;\vec{e}_x,\vec{e}_z,t\right)$ supposé galiléen

→ Système étudié : Point M de masse m

→ Bilan des forces : → Poids $\vec{P} = -mg\cdot\vec{e_z}$

→ Tension ressort $\vec{T} = -k(l-l_0)\vec{e_x} = -k(x-l_0)\cdot\vec{e_x}$

→ Réaction support $\vec{R} = R_N\cdot\vec{e_z} + R_T\cdot\vec{e_x}$

(Et avec glissement $R_T = -f\cdot R_N$)

→PFD, $\Re_G$ galiléen :

$$\vec{P}+\vec{T}+\vec{R} = m\vec{a}_{(M/\Re)} \quad = \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -k(x-l_0) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -fR_N \\ R_N \end{bmatrix} = m\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ainsi : $\begin{cases} \ddot{x} + \omega_0{}^2\cdot x = \omega_0{}^2\cdot(l_0 - fg) \\ R_N = mg \end{cases}$, avec $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

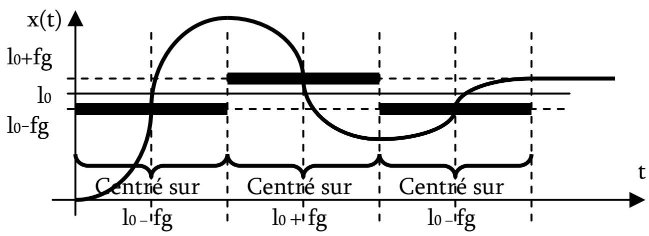
Et $\begin{cases} x(t) = l_0 - fg + A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) \\ x(0) = 0 = l_0 - fg + A \\ \dot{x}(0) = 0 = B\omega_0 \end{cases}$

$$\boxed{\Rightarrow x(t) = (l_0 - fg)\left(1-\cos(\omega_0 t)\right)}$$

2. Date t_1 :

$\begin{cases} \dot{x}(t_1) = 0 \quad \Leftrightarrow (l_0 - fg)\,\omega_0\sin(\omega_0 t_1) = 0 \quad \boxed{\Leftrightarrow \omega_0 t_1 = \pi} \\ \boxed{x(t_1) = (l_0 - fg)\left(1-\cos(\pi)\right) = 2(l_0 - fg)} \end{cases}$

3. Allure (on s'arrête quand on rentre dans le cône de frottement, on ne dépasse pas le seuil…)



Exercice 23 : Equilibre stable ou instable ?

1. $E_P{}^{PES} = Constante$ → N'influera pas les calculs

On peut l'imposer nulle pour z = 0 ➔ $E_P{}^{PES} = 0$

2. Energie potentielle totale :

$E_P{}^{TOTALE} = E_P{}^{ELAST} + E_P{}^{PES} = E_P{}^{ELAST} = \dfrac{1}{2}k(l-l_0)^2 + \cancel{Cstte}$

Mais $l^2 = x^2 + h^2$ → $\boxed{E_P{}^{TOTALE} = \dfrac{1}{2}k\left(\sqrt{x^2+h^2} - l_0\right)^2}$

3. Variation : $\dfrac{dE_P}{dx} = \dfrac{1}{2}k\left[2\left(\sqrt{x^2+h^2} - l_0\right)\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{x^2+h^2}\right)\right]$

$et \quad \dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{x^2+h^2}\right) = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+h^2}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+h^2}}$

Donc : $\dfrac{dE_P}{dx} = \left(\sqrt{x^2+h^2} - l_0\right)\dfrac{kx}{\sqrt{x^2+h^2}} = kx\left(1 - \dfrac{l_0}{\sqrt{x^2+h^2}}\right)$

SOLUTION des EXERCICES – ME3 / ME4 – Feuille 3/3

Suite Exercice 23 :

Et $\boxed{\dfrac{dE_P}{dx}=0 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ ou \\ \sqrt{x^2+h^2}=l_0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ ou \\ x^2=l_0^{\,2}-h^2 \end{cases}}$

<u>Cas 1 : h > l₀</u>, ie $x^2=l_0^{\,2}-h^2<0$

→ Une seule position d'équilibre : $\dfrac{dE_P}{dx}=0 \quad \Leftrightarrow x=0$

Et on a $l_0<\sqrt{x^2+h^2}, \quad donc \ \left(1-\dfrac{l_0}{\sqrt{x^2+h^2}}\right)>0$

Tableau de variation :

x	-∞	0	+∞
$\dfrac{dE_P}{dx}$	-	0	+
E_P	↘		↗

Equilibre stable

<u>Cas 2 : h < l₀</u>, ie $x^2=l_0^{\,2}-h^2>0 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x=\sqrt{l_0^{\,2}-h^2} \\ x=-\sqrt{l_0^{\,2}-h^2} \end{cases}$

→ Trois positions d'équilibre (2 positions stables)

x	-∞		$x=-\sqrt{l_0^{\,2}-h^2}$		0		$x=\sqrt{l_0^{\,2}-h^2}$		+∞
$\dfrac{dE_P}{dx}$		-	0	+	0	-	0	+	
E_P		↘		↗		↘		↗	
			Eq stable		Eq instable		Eq stable		

Exercice 24 : Tunnel terrestre

1. Force gravitationnelle : $\overrightarrow{f}=-mg_0\dfrac{r}{R}\overrightarrow{u_r}$

Attention – 1D en x : $r^2=x^2+d^2$,

$$dE_P^{\ GRAV}=-\overrightarrow{f}\cdot\overrightarrow{dl}=mg_0\frac{r}{R}\overrightarrow{u_r}\cdot dx\overrightarrow{u_x}=mg_0\frac{r}{R}dx\sin\theta$$

$$\Rightarrow dE_P^{\ GRAV}=\frac{mg_0}{R}x\cdot dx$$

On intègre : $\boxed{E_P^{\ GRAV}=\dfrac{mg_0}{2R}x^2+\cancel{C}}\ \left(E_P^{\ GRAV}(O)=C=0\right)$

Conservation de l'énergie mécanique (pas de frottements)

$E_m=0+\dfrac{mg_0}{2R}x^2=\dfrac{1}{2}mv_{\max}^2 \qquad \boxed{\Rightarrow v_{\max}=\sqrt{g_0\left(\dfrac{R^2-d^2}{R}\right)}}$

Position d'équilibre : $\dfrac{dE_P}{dx}=0=\dfrac{mg_0}{R}x \qquad \Leftrightarrow x=0$

Position stable ? $\dfrac{d^2E_P}{dx^2}=\dfrac{mg_0}{R}>0 \qquad \Rightarrow OUI, STABLE$

2. On dérive le bilan d'énergie : $\dfrac{dE_m}{dt}=\dfrac{mg_0}{R}x\cdot\dot{x}+m\dot{x}\cdot\ddot{x}=0$

Cela donne $\boxed{\ddot{x}+\dfrac{g_0}{R}x=0}$ → Oscillateur harmonique

Pulsation propre : $\omega_0=\sqrt{\dfrac{g_0}{R}}$

Equation horaire : $x(t)=A\cos(\omega_0 t)+B\sin(\omega_0 t)$, avec les

CI : $\left.\begin{cases} x(t)=\sqrt{R^2-d^2}=A \\ \dot{x}(t)=0=B\omega_0 \end{cases}\right\} \Rightarrow \boxed{x(t)=\sqrt{R^2-d^2}\cos(\omega_0 t)}$

Vitesse maximale : $\boxed{\max(\dot{x})=\omega_0\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{g_0\left(\dfrac{R^2-d^2}{R}\right)}}$

3. Période du mouvement pour revenir à son point de départ : $\boxed{T_0=\dfrac{2\pi}{\omega_0}=2\pi\sqrt{\dfrac{R}{g_0}}=5026,5s=1h24}$

Exercice 25 : Décollement d'une masse

1. PFS … $\boxed{\Delta l_{eq}=\dfrac{-(m+m')g}{k}}$

2. PFD … $\ddot{z}+\dfrac{k}{(m+m')}z=0$, on pose $\omega_0=\sqrt{\dfrac{k}{m+m'}}$,

   cela donne $\boxed{z(t)=-d\cos(\omega_0 t)}$

3. D'après le PFD, $\boxed{R=m\ddot{z}+mg=md\omega_0^{\,2}\cos(\omega_0 t)+mg}$.

4. Le plateau décolle si la tension s'annule (plus besoin du support pour que le point ne s'écrase pas → Il décolle).

   Ainsi : $R=0$ est impossible si $\boxed{d\omega_0^{\,2}<g}$

   Il ne faut pas bouger le plateau trop rapidement…