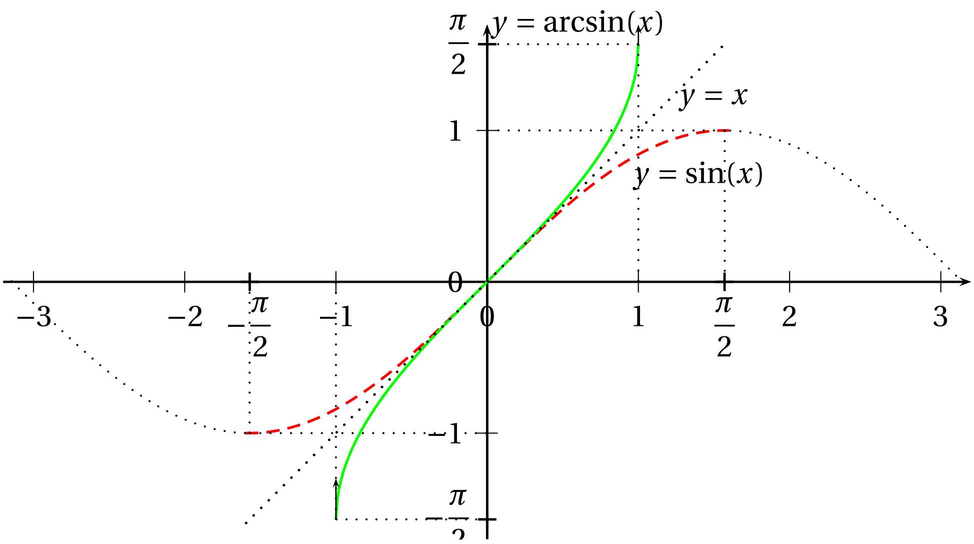
Fonctions circulaires réciproques

I. Fonctions sinus et arcsinus

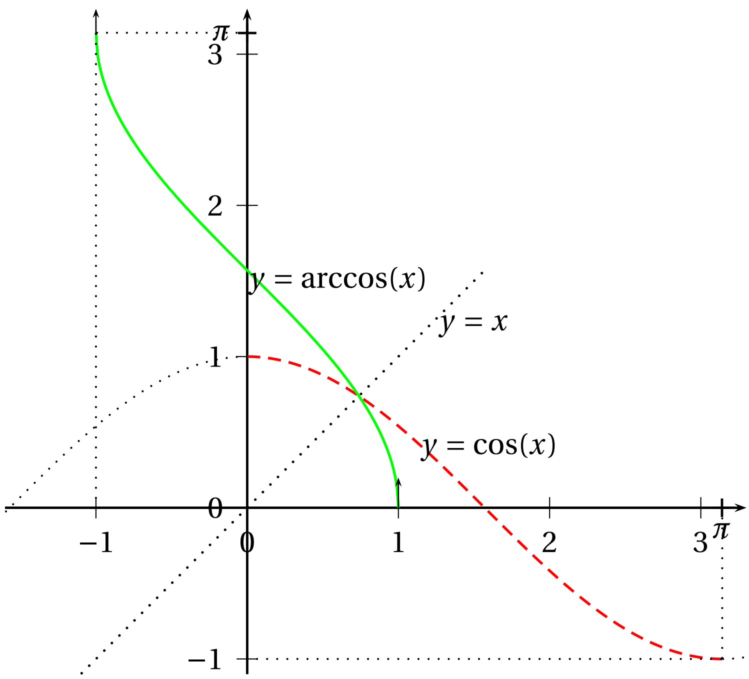


La fonction sinus est une bijection str. croissante de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1, 1]$, $\boxed{\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]}$.

On appelle fonction arcsinus sa fonction réciproque : $\boxed{\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}$.

La fonction arcsinus est continue sur $[-1, 1]$, impaire, **mais** elle n'est dérivable que sur $]-1, 1[$, et on a $\boxed{\forall x \in]-1, 1[, \arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$.

II. Fonctions cosinus et arccosinus



La fonction cosinus réalise une bijection strictement décroissante de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$:

$$\boxed{\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]}$$

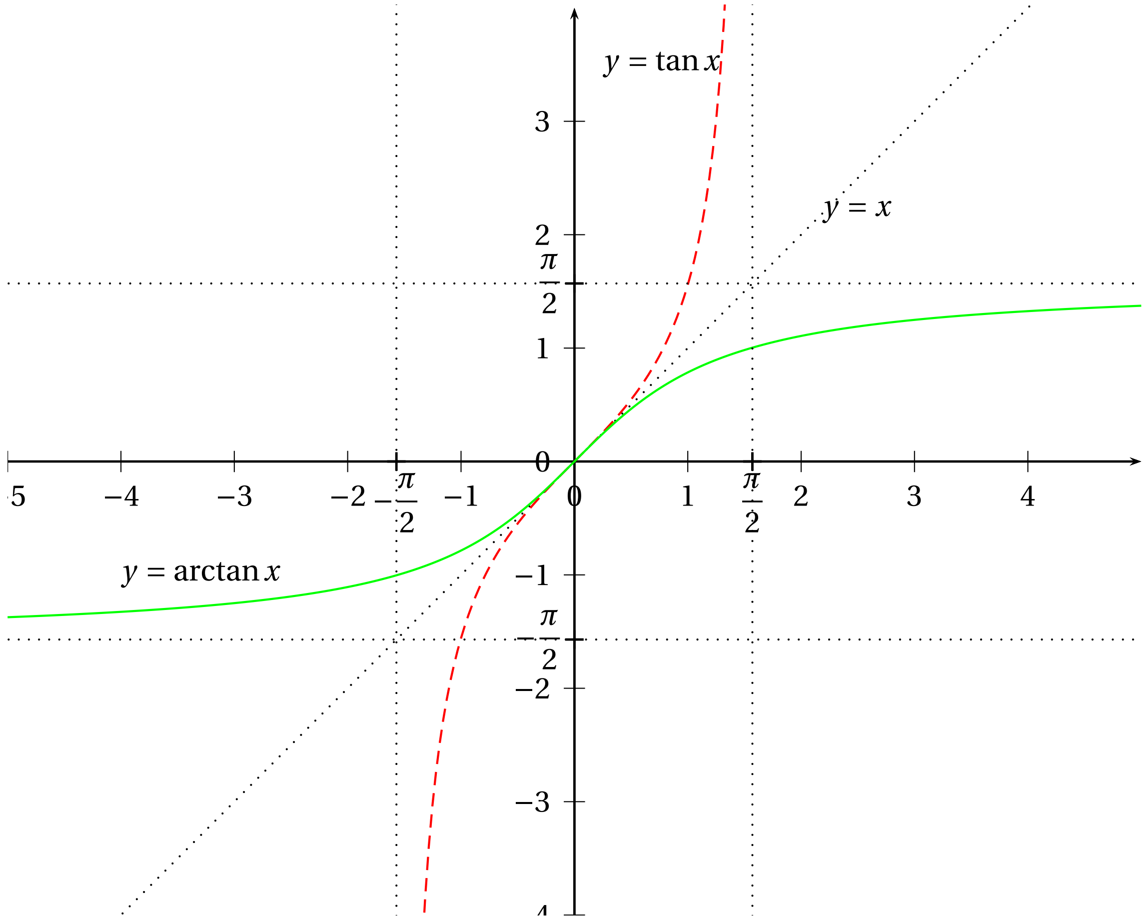
On appelle arccosinus sa fonction réciproque, donc définie sur $[-1, 1]$:

$$\boxed{\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]}$$

La fonction arccosinus est continue sur $[-1, 1]$ **mais** elle n'est dérivable que sur $]-1, 1[$, et on a

$$\boxed{\forall x \in]-1, 1[, \arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

III. Fonctions tangente et arctangente



La fonction tangente réalise une bijection str. croissante de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$, $\boxed{\tan : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}}$.

On appelle fonction arctangente sa fonction réciproque, $\boxed{\arctan : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[}$.

La fonction arctangente est dérivable (donc continue) sur $\mathbb{R}$, impaire, et : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \arctan' x = \frac{1}{1+x^2}}$.

On a les limites :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$

donc la courbe représentative de la fonction arctangente a des asymptotes horizontales $y = \pm\frac{\pi}{2}$.