Colles : semaine 1

I Révisions

Revoir dans le cours de Sup : suites réelles ou complexes, prépondérance ($f = o(g)$), équivalence ($f \sim g$), et DL.

II Séries numériques

II.A Exemples

Série géométrique. Série harmonique. Série exponentielle.

II.B Premiers théorèmes

Linéarité. Partie réelle et partie imaginaire d'une série complexe. Troncature. Utilisation d'une série associée pour l'étude d'une suite (principe du télescopage). Condition nécessaire de convergence (le terme général tend vers 0).

II.C Séries à termes positifs

Principe fondamental : majoration de la suite des sommes partielles. Utilisation d'une série majorante ou minorante. Séries de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$. Utilisation d'équivalences pour les séries à termes positifs. Comparaison d'une série à termes positifs avec une série de Riemann.

II.D Comparaison d'une série à termes positifs avec une série géométrique

Le résultat principal. Majoration du reste lorsque la convergence est établie par ce critère. Règle de d'Alembert.

II.E Séries de réels ou de complexes absolument convergentes

Démonstrations à connaître (pas plus de 15-20 minutes) :

1. La suite (u_n) converge si et seulement si la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge.
2. Si la série $\sum u_n$ converge, alors la suite (u_n) tend vers 0.
3. La série $\displaystyle\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge pour $\alpha > 1$.
4. Si $\sum a_n$ est une série à termes > 0 et s'il existe $\alpha \in [0, 1[$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geqslant n_0, \ \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \alpha$$

alors la série converge.