Colles : semaine 10

VIII Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

VIII.A Vecteurs propres et valeurs propres d'un endomorphisme

Définitions, spectre, sous-espace propre, éléments propres d'une homothétie, d'un projecteur, d'une symétrie. La somme finie d'une famille de sous-espaces propres associés à des valeurs propres différentes est directe.

VIII.B Réduction d'un endomorphisme en dimension finie

Polynôme caractéristique $\chi_f : x \mapsto \det(xId_E - f)$; coefficient dominant.

Si une valeur propre λ est d'ordre de multiplicité k, on a $1 \leqslant \dim E_\lambda \leqslant k$; endomorphisme diagonalisable ; un endomorphisme u est diagonalisable si et seulement si la somme de ses sous-espaces propres est égale à E ; Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé et l'ordre de multiplicité de chaque valeur propre est égal à la dimension du sous-espace propre associé. Un endomorphisme dont le polynôme caractéristique est scindé et dont toutes les valeurs propres sont simples est diagonalisable.

Endomorphisme trigonalisable ; caractérisation : le polynôme caractéristique est scindé ; déterminant et trace d'un endomorphisme trigonalisable en fonction des valeurs propres. Trigonalisation sur des exemples (aucune technique effective n'est au programme mais il faut mieux se méfier).

VIII.C Réduction d'une matrice carrée

Éléments propres d'une matrice. Diagonalisation et trigonalisation.

VIII.D Puissances d'une matrice carrée

Cas où elle est diagonalisable. On a vu aussi (pas officiellement au programme) le cas où elle est trigonalisable avec une valeur propre unique.

Démonstrations à connaître (pas plus de 15-20 minutes) :

1. Expliquer pourquoi toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable et dans ce cas montrer que $\mathrm{Tr}(A)$ est la somme des valeurs propres et $\det(A)$ le produit des valeurs propres de A. Contre-exemple pour une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. $f \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable si et seulement si χ_f est scindé et si l'ordre de multiplicité de chaque valeur propre est égal à la dimension du sous-espace propre associé (on admet que f est diagonalisable si et seulement si $E = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}$ où $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont les valeurs propres de f).
3. Si λ est valeur propre de multiplicité k, on a $1 \leqslant \dim E_\lambda \leqslant k$.
4. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ des valeurs propres distinctes de f, alors :

$$E_{\lambda_1} + E_{\lambda_2} + \cdots + E_{\lambda_p} = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}$$

Remarque : Les démonstrations se trouvent dans le *cours en ligne*, de manière plus ou moins explicite.