# Colles : semaine 12

## VIII Espaces préhilbertiens réels

### VIII.A produit scalaire

Définition du produit scalaire. Exemples sur $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$. Inégalité de Cauchy-Schwarz. Norme associée et distance associée au produit scalaire.

### VIII.B Orthogonalité

Vecteurs orthogonaux, parties orthogonales, orthogonal d'une partie, familles orthogonales et familles orthonormales.
Exemple : $\mathcal{C}_T(\mathbb{R})$ avec le produit scalaire $(f \mid g) = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T fg$.
Théorème de Pythagore.

### VIII.C Bases orthonormales dans un espace euclidien

Méthode de Schmidt, orthogonal d'un sous-espace vectoriel de dimension finie. projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel $F$ de dimension finie, distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel de dimension finie.
Il faut être capable de déterminer l'expression du projeté orthogonal à partir d'une base orthogonale ou d'une famille génératrice quelconque (système) du sous-espace $F$.

**Démonstrations à connaître (pas plus de 15-20 minutes) :**

1. Si $A$ et $B$ sont des parties d'un espace préhilbertien $E$, alors $A^\perp$ (et $B^\perp$) est un sous-espace vectoriel de $E$ et :
$$A \subset B \implies B^\perp \subset A^\perp$$
2. Une famille orthogonale constituée de vecteurs non nuls est libre.
3. Soit $E$ préhilbertien réel, et soit $F$ un sous-espace vectoriel de $E$, de dimension finie $k$. On a :
$$E = F \oplus F^\perp$$