Colles : semaine 14

X Espaces euclidiens

X.A Matrices orthogonales

Matrices orthogonales, caractérisation par l'égalité $A^T A = I_n$ ou par le fait que les colonnes forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ pour le produit scalaire :

$$\forall X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad (X \,|\, Y) = X^T Y$$

Groupe orthogonal $O(n)$ (la définition d'un groupe n'est pas exigible des étudiants).

X.B Isométries vectorielles

Isométries vectorielles, groupe orthogonal $\mathcal{O}(E)$. Caractérisation par la conservation du produit scalaire. Matrice dans une base orthonormée, déterminant. Groupe $\mathcal{SO}(E)$ des isométries positives, isométries négatives. Espace vectoriel euclidien orienté, valeurs propres d'une isométrie vectorielle.

Si un sous-espace F est stable par une isométrie vectorielle, son orthogonal $F^\perp$ est stable par cette isométrie.

X.C Classification des isométries vectorielles en dimension 2

X.D Classification des isométries vectorielles en dimension 3

Démonstrations à connaître (pas plus de 15-20 minutes) :

- Si $f \in \mathcal{L}(E)$ et si la matrice de f dans une base orthonormée est orthogonale, alors $\det f = \pm 1$ et f est une isométrie vectorielle.
- Si f est une isométrie vectorielle, alors $\operatorname{Spec} f \subset \{-1, 1\}$, et si -1 et 1 sont valeurs propres, alors les sous-espaces propres correspondants sont orthogonaux.
- Dans une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^2$, une isométrie positive a une matrice de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, avec $a^2 + b^2 = 1$. a et b sont indépendants de la base orthonormée directe choisie.