Colles : semaine 17

X Fonctions d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$

XI Probabilités sur un univers fini ou dénombrable

XI.A Espaces probabilisés finis ou dénombrables

Ensemble dénombrable. Expérience aléatoire. Suite finie ou infinie d'évènements ; union et intersection. Système complet d'évènements.

On appelle probabilité sur Ω toute application P de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $[0,1]$ vérifiant $P(\Omega) = 1$, et pour toute suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'évènements deux à deux incompatibles :

$$P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{p=0}^{+\infty} P(A_n)$$

Équivalence avec la définition vue en première année lorsque l'univers est fini.

XI.B Indépendance et conditionnement

Probabilité conditionnelle de A sachant B. Notation : $P(A|B)$ ou $P_B(A)$. Formule des probabilités composées. Extension de la formule aux conditionnements successifs.

Formule des probabilités totales : si $I \subset \mathbb{N}$ et $(A_i)_{i\in I}$ est un système complet d'évènements de probabilités non nulles, alors :

$$P(B) = \sum_{i\in I} P(B \cap A_i) = \sum_{i\in I} P(B|A_i)P(A_i)$$

Formules de Bayes.

Indépendance de deux évènements. Indépendance d'une famille finie d'évènements.

Démonstrations à connaître :

Soit P une probabilité sur un univers Ω fini ou dénombrable :

— Si $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

— Si $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, alors l'application P_B est une probabilité sur Ω.

— Soit (Ω, P) un espace probabilisé. $A_1, \cdots, A_n$ des évènements tels que $P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) > 0$. Alors :

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) \times P(A_2|A_1) \times P(A_3|A_1 \cap A_2) \times \cdots \times P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1})$$