# Colles : semaine 2

## I Séries numériques

Des exercices peuvent être donnés.

## II Séries entières

### II.A Généralités

#### II.A.1 Définition

#### II.A.2 Lemme d'Abel

Soit $r > 0$ tel que la suite $(|a_n|r^n)$ est bornée : $|z| < r \implies \sum a_n z^n$ converge absolument.

#### II.A.3 Rayon de convergence, disque ouvert de convergence

#### II.A.4 Théorème fondamental

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R$ : elle diverge pour $|z| > R$ et converge absolument pour $|z| < R$.

### II.B Calcul pratique du rayon de convergence

### II.C Somme de deux séries entières, produit par un scalaire

### II.D Étude de la fonction $x \mapsto \sum_{x=0}^{\infty} a_n x^n$

#### II.D.1 Intervalle ouvert de convergence

#### II.D.2 Continuité et dérivabilité

Continuité et dérivabilité sur $]-R, R[$. La série obtenue par dérivation a le même rayon de convergence que la série initiale (résultats admis)

#### II.D.3 Intégration terme à terme

La série obtenue a le même rayon de convergence que la série initiale (résultats admis).

### II.E Séries de réels ou de complexes absolument convergentes

**Démonstrations à connaître (pas plus de 15-20 minutes) :**

1. Lemme d'Abel.
2. Si à partir d'un certain rang, on a $|a_n| \leqslant |b_n|$, alors $R_a \geqslant R_b$
   (en désignant par $R_a$ et $R_b$ les rayons de convergence respectifs des séries $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$).
3. Si $R_a < R_b$, la série $\sum (a_n + b_n) z^n$ a pour rayon de convergence $R = R_a$.
4. Soit la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (rayon de convergence $R > 0$). On a $a_k = \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}$.