Colles : semaine 3

II Séries entières

II.A Généralités

II.A.1 Définition

II.A.2 Lemme d'Abel

II.A.3 Rayon de convergence, disque ouvert de convergence

II.A.4 Théorème fondamental

II.B Calcul pratique du rayon de convergence

II.C Somme de deux séries entières, produit par un scalaire

II.D Étude de la fonction $x \mapsto \sum_{x=0}^{\infty} a_n x^n$

II.D.1 Intervalle ouvert de convergence

II.D.2 Continuité

II.D.3 Dérivabilité

II.D.4 Intégration terme à terme

II.D.5 Exemples de développements en série entière

$$\frac{1}{1-x},\ \frac{1}{1+x},\ \ln(1+x),\ e^x,\ \cos x \text{ et } \sin x,\ (1+x)^\alpha$$

obtenus directement, par intégration, par l'inégalité de Taylor-Lagrange, par dérivation, ou par utilisation d'une équation différentielle.

II.D.6 Définition et propriétés de l'exponentielle complexe

Démonstrations à connaître (pas plus de 15-20 minutes) :

1. Soit la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (rayon de convergence $R > 0$). On a $a_k = \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}$.
2. Développements en série entière de $\ln(1+x)$ et $\ln(1-x)$.
3. Recherche du développement en série entière de exp comme solution unique de l'équation différentielle $y' = y$, avec $y(0) = 1$.
4. Montrer pour $\theta \in \mathbb{R}$: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ à partir de la définition de l'exponentielle complexe.