Colles : semaine 4

III Intégration sur un segment

Essentiellement des révisions de première année.

III.A Notion d'intégrale

Approche géométrique pour les fonctions positives, continues sur un segment $[a,b]$. Définition de l'intégrale à l'aide des suites :

$$n \mapsto \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a+k\frac{b-a}{n})$$

Étude de ces suites. Sommes de Riemann. Valeur moyenne d'une fonction, relation de Chasles.

III.B Intégrale d'une fonction à valeurs réelles ou complexes

Définition comme limite de $\sigma_n(f) = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(a+k\frac{b-a}{n}\Big)$.

III.C Propriétés de l'intégrale

Intégrale d'une fonction constante. Linéarité. Chasles. Croissance. Inégalité de la moyenne.

III.D Lien entre intégration et dérivation

Théorème fondamental de l'analyse. Inégalité des accroissements finis. Intégration par parties. Intégration par changement de variable.

III.E Quelques calculs de primitives et d'intégrales

Techniques usuelles de calcul d'intégrales sur un segment (cf feuille de TD no 3 sur le site du lycée) : Calcul d'intégrales et de primitives de fractions rationnelles.

Démonstrations à connaître (pas plus de 15-20 minutes) :

1. Soient $\alpha, \beta : I \to J$, dérivables, et soit $f \in \mathcal{C}(J, \mathbb{C})$. Montrer que la fonction
$$g : x \mapsto \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$$
est dérivable sur I et donner l'expression de sa dérivée en fonction de f, α, β et de leurs dérivées.
2. Inégalité des accroissements finis.
3. Formule du changement de variable.
4. Calcul de l'intégrale de Wallis $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x\,\mathrm{d}x$.
Trouver en particulier une relation entre I_{n+1} et I_n.