Colles : semaine 5

III Intégration sur un segment

III.A Notion d'intégrale

III.B Intégrale d'une fonction à valeurs réelles ou complexes

III.C Propriétés de l'intégrale

III.D Lien entre intégration et dérivation

III.E Quelques calculs de primitives et d'intégrales

Techniques usuelles de calcul d'intégrales sur un segment (cf feuille de TD no 3 sur le site du lycée).

IV Intégration sur un intervalle quelconque

IV.A Intégrales impropres

Définition d'une intégrale convergente ; exemples fondamentaux ; relation de Chasles ; linéarité ; fausses intégrales impropres.

IV.B Intégrale impropre d'une fonction positive

Le théorème principal (majoration indépendante de x de $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$) ; utilisation d'une fonction majorante (éventuellement au voisinage de la borne) ; utilisation de fonctions équivalentes.

IV.C Convergence absolue

Toute intégrale absolument convergente est convergente (théorème admis).

IV.D Comparaison d'une série et d'une intégrale

Cas d'une fonction positive décroissante.

IV.E Intégration par parties

On se ramène à une intégrale sur un segment.

Démonstrations à connaître (pas plus de 15-20 minutes) :

1. Condition nécessaire et suffisante de convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$.
2. Convergence de $\displaystyle\int_0^1 \ln t\,\mathrm{d}t$.
3. Intégrale impropre d'une fonction positive : énoncer et démontrer à partir du théorème principal le principe de majoration et le principe des fonctions équivalentes.
4. Si $f : [1, +\infty[\mapsto \mathbb{R}_+$ est continue, positive, et décroissante :

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) < +\infty \iff \int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge}$$