Colles : semaine 6

IV Intégration sur un intervalle quelconque

IV.A Intégrales impropres

IV.B Intégrale impropre d'une fonction positive

IV.C Convergence absolue

IV.D Comparaison d'une série et d'une intégrale

IV.E Intégration par parties

IV.F Changement de variable

Utilisation pour la convergence ou le calcul d'une intégrale. Toutes les techniques de calcul vues à la feuille de TD no 3 doivent être connues et adaptées à un intervalle quelconque.

IV.G Fonctions intégrables sur I, intervalle quelconque

La notation $\displaystyle\int_{[a,b[} f(t)\,\mathrm{d}t$ plutôt que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est limitée au cas de l'absolue convergence.

Fonction intégrable sur un intervalle I quand I est un semi-ouvert ou quand I est un ouvert en ses deux bornes définie par la convergence de $\displaystyle\int_I |f(t)|\,\mathrm{d}t$

Définition de $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$. Cas d'un segment : si f est continue sur $[a,b]$, alors f est intégrable sur $]a,b]$, $[a,b[$ et $]a,b[$, et :

$$\int_{[a,b]} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{[a,b[} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{]a,b]} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{]a,b[} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Propriétés (linéarité, Chasles, etc...).

V Compléments d'algèbre linéaire

Revoir tout le programme de Sup concernant l'algèbre linéaire, qui est repris ici dans les grandes lignes avec quelques compléments.

V.A Bases

Combinaisons linéaires - Sous-espace vectoriel engendré par une partie - Partie génératrice - Familles finies ou infinies libres - Familles finies ou infinies liées - Bases - Rappels sur la dimension finie - Exemples de bases - Application linéaire définie par une base et son image. Somme de p sous-espaces vectoriels.

Démonstrations à connaître (pas plus de 15-20 minutes) :

1. La famille $(x \mapsto e^{ax})_{a\in\mathbb{R}}$ de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est libre.
2. Si la famille $(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \dots, \overrightarrow{x_n})$ est liée, tandis que la famille $(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \dots, \overrightarrow{x_{n-1}})$ est libre, alors $\overrightarrow{x_n}$ est combinaison linéaire de $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \dots, \overrightarrow{x_{n-1}}$.
3. Si f est un endomorphisme nilpotent et p le plus petit entier tel que $f^p = 0$, alors il existe $x \in E$ tel que $(x, f(x), \dots, f^{p-1}(x))$ est libre.