Colles : semaine 7

V Compléments d'algèbre linéaire

Revoir tout le programme de Sup concernant l'algèbre linéaire, qui est repris ici dans les grandes lignes avec quelques compléments.

V.A Bases

Combinaisons linéaires - Sous-espace vectoriel engendré par une partie - Partie génératrice - Familles finies ou infinies libres - Familles finies ou infinies liées - Bases - Rappels sur la dimension finie - Exemples de bases - Application linéaire définie par une base et son image.

V.B Sommes de sous-espaces vectoriels. Sommes directes

Définition de la somme d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels. Somme directe.
Caractérisation : la somme $F_1 + \cdots + F_p$ est directe si et seulement si pour tout $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p) \in F_1 \times \ldots \times F_p$:

$$\vec{x}_1 + \cdots + \vec{x}_p = \vec{0} \implies \vec{x}_1 = \cdots = \vec{x}_p = \vec{0}$$

En dimension finie, base adaptée à une décomposition en somme directe.

V.C Cas particulier : Somme directe de deux sous-espaces vectoriels. Sous-espaces vectoriels supplémentaires

Définition - Caractérisation - Base adaptée à une décomposition en somme directe de deux sous-espaces vectoriels - Caractérisation des sommes directes en dimension finie.

V.D Formule du rang

Noyau et image - Définition du rang - Pour un endomorphisme en dimension finie : équivalence entre l'injectivité, la surjectivité, et la bijectivité.

V.E Hyperplan en dimension finie

Équations cartésiennes d'un hyperplan. Caractérisation comme sous-espace admettant une droite comme supplémentaire.

V.F Sous-espaces stables par un endomorphisme

Définition. Forme matricielle dans une base adaptée.

V.G Exemples d'endomorphismes

Homothéties - Projecteurs

Démonstrations à connaître (pas plus de 15-20 minutes) :

1. La somme $F_1 + \cdots + F_p$ est directe si et seulement si pour tout $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p) \in F_1 \times \ldots \times F_p$:

$$\vec{x}_1 + \cdots + \vec{x}_p = \vec{0} \implies \vec{x}_1 = \cdots = \vec{x}_p = \vec{0}$$

2. Si E est de dimension finie et est somme directe de p sous-espaces vectoriels $F_1, F_2, \ldots, F_p$, alors la concaténation de bases des F_i $(1 \leqslant i \leqslant p)$ donne une base de E (démonstration pour $p = 3$).
3. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ une base de E. Alors $\left(f(\overrightarrow{e_1}), f(\overrightarrow{e_2}), \ldots, f(\overrightarrow{e_n})\right)$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$, et si f est injective c'est une base de $\operatorname{Im} f$.
4. La somme $F_1 + F_2$ est directe si et seulement si $F_1 \cap F_2 = \{0\}$.
   Donner un contre-exemple pour $p = 3$ concernant l'affirmation : « $F_1 + \cdots + F_p$ directe si et seulement si les intersections des F_i sont deux à deux réduites à $\{0\}$. »