Colles : semaine 8

V Compléments d'algèbre linéaire

V.A Bases

V.B Sommes de sous-espaces vectoriels. Sommes directes

V.C Cas particulier : Somme directe de deux sous-espaces vectoriels. Sous-espaces vectoriels supplémentaires

V.D Formule du rang

V.E Hyperplan en dimension finie

Équations cartésiennes d'un hyperplan. Caractérisation comme sous-espace admettant une droite comme supplémentaire.

V.F Sous-espaces stables par un endomorphisme

Définition. Forme matricielle dans une base adaptée.

V.G Exemples d'endomorphismes

Homothéties - Projecteurs - Automorphismes involutifs (symétries).

V.H Changement de base

V.I Matrices

Trace d'une matrice. Linéarité - Trace d'un produit de matrices - Trace de deux matrices semblables - Trace d'un endomorphisme. Transposée A^T d'une matrice carrée. Opérations : combinaison linéaire produit, inverse. Matrice symétrique, antisymétrique.

Démonstrations à connaître (pas plus de 15-20 minutes) :

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Si pour tout $x \in E$, x et $f(x)$ sont liés, alors f est une homothétie.
2. Linéarité de la trace. Trace d'un produit : si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.
   Conséquence : si deux matrices sont semblables, alors leurs traces sont égales.
3. À partir de la définition d'un projecteur p, montrer que p est linéaire, que $p \circ p = p$, que p est la projection sur $\mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\, p$, et que $\mathrm{Im}\, p = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_E)$.
4. Si $f \circ f = Id_E$, alors f est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(f - Id_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f + Id_E)$ (cf corrigé de l'exercice du cours en ligne).
5. $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ (cf corrigé de l'exercice du cours en ligne).