Colles : semaine 9

VI Compléments d'algèbre linéaire

Des exercices peuvent être posés.

VII Déterminants

VII.A Déterminant d'une matrice carrée

Défini comme l'unique application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$ telle que :

(i) Le déterminant est linéaire par rapport à chacune des colonnes.

(ii) L'échange de deux colonnes multiplie le déterminant par -1.

(iii) Le déterminant de I_n vaut 1.

Interprétation géométrique pour $n = 2$ (aires algébriques) ou $n = 3$ (volumes algébriques).

VII.B Propriétés des déterminants

Caractérisation d'une matrice inversible - Déterminant d'un produit de matrices - Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs. Invariance par transposition (admise) - développement par rapport à une colonne ou une ligne.

VII.C Déterminant d'une famille de vecteurs, d'un endomorphisme

Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base. Caractérisation des bases. Déterminant d'un endomorphisme. Caractérisation des automorphismes.

VIII Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

VIII.A Vecteurs propres et valeurs propres d'un endomorphisme

Définitions, spectre, sous-espace propre, éléments propres d'une homothétie, d'un projecteur, d'une symétrie. La somme finie d'une famille de sous-espaces propres associés à des valeurs propres différentes est directe.

Démonstrations à connaître (pas plus de 15-20 minutes) :

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Un vecteur non nul $\vec{x}$ est vecteur propre de f si et seulement si la droite $\mathbb{K}\vec{x}$ est stable par f (voir cours en ligne).
2. Valeurs propres et sous-espaces propres d'un projecteur autre que l'application nulle ou l'identité (voir cours en ligne).
3. Valeurs propres et sous-espaces propres d'une symétrie vectorielle autre que Id_E ou $-\mathrm{Id}_E$ (voir cours en ligne).
4. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ des valeurs propres distinctes de f, alors :

$$E_{\lambda_1} + E_{\lambda_2} + \cdots + E_{\lambda_p} = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}$$