Devoir en temps libre n$^{\text{o}}$1 de Mathématiques

Partie I : Transformation d'Abel

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On s'intéresse ici à la convergence de la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n$.

Pour tout entier naturel n, on pose $B_n = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k$.

1. (a) Vérifier que $B_0 = b_0$ et $\forall n \geqslant 1$, $b_n = B_n - B_{n-1}$.

   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_k = a_n B_n + \sum\limits_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k$.

2. On suppose que la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

   (a) Montrer que la suite $(a_n B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

   (b) On suppose de plus que la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (a_n - a_{n+1})$ est absolument convergente ; montrer alors que la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (a_n - a_{n+1}) B_n$ est absolument convergente et en déduire la convergence de la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n$.

3. Établir que si la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante de limite nulle et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée alors la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n$ converge.

4. On appelle *série alternée* une série du type $\sum (-1)^n a_n$ avec $a_n > 0$.
   Énoncez et démontrez (à l'aide de ce qui précède) un critère simple sur la suite (a_n) garantissant la convergence d'une série alternée.

   En déduire très simplement la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

Partie II : Application à l'étude d'une série trigonométrique

Pour tout réel x et tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose :

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin(kx) \quad \text{et} \quad C_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \cos(kx)$$

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$,

$$C_n(x) + iS_n(x) = \frac{1 - e^{inx}}{1 - e^{ix}} e^{ix},$$

   et que

$$\frac{1}{2} + C_n(x) = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \quad \text{et} \quad S_n(x) = \frac{\sin\left(n\frac{x}{2}\right)\sin\left((n+1)\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

2. En déduire alors que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, la suite $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et établir la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(nx)}{n}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

   Dans la suite, on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$, $x \in \mathbb{R}$, et on cherche à calculer la somme de cette série.

3. (a) Vérifier que f est impaire et 2π-périodique.

   (b) Soit $x \in]0, \pi[$. Montrer que $\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k} = \frac{\pi - x}{2} - \frac{1}{2}\int_x^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\mathrm{d}t$.

4. Soit $x \in]0, \pi[$; pour tout $t \in [x, \pi]$, on pose $h(t) = \frac{1}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$.

   (a) Vérifier que h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[x, \pi]$ et que h' y est bornée.

   (b) Montrer la formule :
$$\int_x^{\pi} h(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,\mathrm{d}t = \frac{2}{2n+1}\left(\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} + \int_x^{\pi} h'(t)\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,\mathrm{d}t\right).$$

   (c) En déduire un majorant pour la valeur absolue de l'intégrale du premier membre et conclure que cette intégrale tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

   (d) Établir alors que pour tout $x \in]0, 2\pi[$, $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$.

Partie III : Une majoration uniforme des sommes partielles de la série précédente

On conserve les notations de la partie précédente.

1. Soit $x \in]0, 2\pi[$.

   (a) Montrer, en utilisant une transformation d'Abel (I.1), que pour tout couple (m, n) d'entiers naturels tels que $1 \leqslant m < n$, on a
$$\sum_{p=m+1}^{n} \frac{\sin(px)}{p} = \frac{S_n(x)}{n} + \sum_{p=m+1}^{n-1} S_p(x)\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) - \frac{S_m(x)}{m+1}.$$

   (b) En déduire que
$$\left|\sum_{p=m+1}^{n} \frac{\sin(px)}{p}\right| \leqslant \frac{2}{(m+1)\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \text{ et que } \left|\sum_{p=m+1}^{+\infty} \frac{\sin(px)}{p}\right| \leqslant \frac{2}{(m+1)\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

2. Soit $x \in]0, \pi]$. On note k la partie entière de $\frac{\pi}{x}$: $k = E\left(\frac{\pi}{x}\right)$; on a donc $k \geqslant 1$.

   (a) Montrer que $0 \leqslant \sum_{p=1}^{k} \frac{\sin(px)}{p} \leqslant kx \leqslant \pi$.

   (b) Montrer que si $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, alors $\sin\theta \geqslant \frac{2}{\pi}\theta$.

   (c) Soit $n \geqslant k+1$; Montrer alors que $\left|\sum_{p=k+1}^{n} \frac{\sin(px)}{p}\right| \leqslant 2$.

3. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout entier naturel $n \geqslant 1$,
$$\left|\sum_{p=1}^{n} \frac{\sin(px)}{p}\right| \leqslant 2 + \pi$$

Correction du DM1 :

Partie I : Transformation d'Abel

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On s'intéresse ici à la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} a_nb_n$.

Pour tout entier naturel n, on pose $B_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k$.

1. (a) On a : $B_0 = \displaystyle\sum_{k=0}^{0} b_k = b_0$ et $\forall n \geqslant 1$, $b_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k - \sum_{k=0}^{n-1} b_k = B_n - B_{n-1}$. Donc :

$$\boxed{B_0 = b_0 \text{ et } \forall n \geqslant 1,\ b_n = B_n - B_{n-1}.}$$

   (b) On utilise les relations ci-dessus pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} a_kb_k &= a_0B_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k(B_k - B_{k-1}) \\ &= a_0B_0 + \sum_{k=1}^{n} a_kB_k - \sum_{k=1}^{n} a_kB_{k-1}\end{aligned}$$

   Puis par un décalage d'indice dans la seconde somme :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} a_kb_k &= a_0B_0 + \sum_{k=1}^{n} a_kB_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}B_k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} a_kB_k + a_nB_n - \sum_{k=0}^{n} a_{k+1}B_k\end{aligned}$$

   En regroupant les sommes, on a montré ainsi :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \sum_{k=0}^{n} a_kb_k = a_nB_n + \sum_{k=0}^{n-1}(a_k - a_{k+1})B_k}$$

2. On suppose que la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

   (a) La suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, donc :

$$\exists M > 0 \text{ tel que : } \forall n \in \mathbb{N},\ |B_n| \leqslant M$$

   On peut donc majorer :

$$|a_nB_n| = |a_n||B_n| \leqslant M|a_n|$$

   Or, la suite (a_n) convergeant vers 0, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} M|a_n| = 0$, et par la majoration ci-dessus :

$$\boxed{\text{La suite } (a_nB_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } 0.}$$

   (b) Considérons le terme général :

$$\big|(a_k - a_{k+1})B_k\big| \leqslant |a_k - a_{k+1}| \times |B_k| \leqslant M|a_k - a_{k+1}|$$

   La série $\sum |a_k - a_{k+1}|$ est convergente, donc par comparaison, la série $\sum \big|(a_k - a_{k+1})B_k\big|$ est de même nature. Ainsi :

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\in\mathbb{N}} (a_n - a_{n+1})B_n \text{ est absolument convergente.}}$$

Cette série est donc convergente. Or, l'égalité prouvée à la question 1b, et la convergence de cette série ainsi que de la suite $(a_n B_n)$ permettent de conclure que la suite des sommes partielles $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_k\right)$ a une limite, c'est à dire :

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n \text{ est convergente.}}$$

3. En utilisant le fait que (a_n) est décroissante, puis un télescopage, on peut écrire que :

$$\sum_{k=0}^{n} |a_k - a_{k+1}| = \sum_{k=0}^{n} (a_k - a_{k+1}) = a_0 - a_{n+1}$$

On en déduit que la suite (a_n) et la série $\sum |a_k - a_{k+1}|$ sont de même nature : cette dernière série est donc convergente. Les hypothèses de la question 2 sont ainsi vérifiées, ce qui prouve que :

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n \text{ converge.}}$$

4. Si (a_n) décroît et tend vers 0 et si $b_n = (-1)^n$, on a $B_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair.} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$.

La suite (B_n) est donc bornée, ce qui permet d'appliquer le résultat de la question précédente. On retrouve par là le critère spécial des séries alternées :

$$\boxed{\text{Si la suite } (a_n) \text{ décroît et tend vers 0, la série } \sum (-1)^n a_n \text{ converge.}}$$

En particulier, puisque la suite $n \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ décroît et tend vers 0 :

$$\boxed{\text{La série } \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \text{ converge.}}$$

On peut remarquer qu'il s'agit d'une série convergente et non absolument convergente.

Partie II : Application à l'étude d'une série trigonométrique

Pour tout réel x et tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose :

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin(kx) \text{ et } C_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \cos(kx)$$

1. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$:

$$C_n(x) + iS_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \big(\cos(kx) + i\sin(kx)\big) = \sum_{k=0}^{n} e^{ikx} - 1$$

On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique de raison $e^{ix} \neq 1$, donc :

$$C_n(x) + iS_n(x) = \frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} - 1 = \frac{e^{ix} - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}}$$

Ce qui démontre finalement le résultat après factorisation :

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z},\quad C_n(x) + iS_n(x) = \frac{1 - e^{inx}}{1 - e^{ix}} e^{ix}}$$

Il reste à exprimer ce résultat sous forme trigonométrique afin de pouvoir distinguer la partie réelle et la partie imaginaire. En appliquant la factorisation par l'arc moitié, on obtient :

$$C_n(x) + iS_n(x) = \frac{e^{inx/2}(e^{-inx/2} - e^{inx/2})}{e^{ix/2}(e^{-ix/2} - e^{ix/2})} e^{ix} = \frac{-2i \sin \frac{nx}{2}}{-2i \sin \frac{x}{2}} e^{\frac{i(n+1)x}{2}} = \frac{\sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} e^{\frac{i(n+1)x}{2}}$$

Puis, en prenant la partie réelle du résultat, on a :

$$C_n(x) = \frac{\sin \frac{nx}{2} \cos \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \frac{\sin \frac{(2n+1)x}{2} - \sin \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \frac{\sin \frac{(2n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} - \frac{1}{2}$$

En prenant la partie imaginaire, on a de même :

$$S_n(x) = \frac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$$

En résumé :

$$\boxed{\frac{1}{2} + C_n(x) = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)} \quad \text{et} \quad S_n(x) = \frac{\sin\left(n\frac{x}{2}\right) \sin\left((n+1)\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.}$$

2. On a donc pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$:

$$|S_n(x)| = \frac{\left|\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{(n+1)x}{2}\right|}{\left|\sin \frac{x}{2}\right|} \leqslant \frac{1}{\left|\sin \frac{x}{2}\right|}$$

Ce majorant est indépendant de n. On a donc :

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}, \text{ la suite } (S_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée.}}$$

D'après la question 3 de la partie I, le résultat ci-dessus et le fait que la suite $n \mapsto \frac{1}{n}$ est décroissante de limite nulle prouvent que :

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(nx)}{n} \text{ converge pour tout } x \in \mathbb{R}.}$$

Dans la suite, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$, $x \in \mathbb{R}$, et on cherche à calculer la somme de cette série.

3. (a) On constate que :

$$f(-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(-nx)}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{\sin(nx)}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = -f(x)$$

$$f(x + 2\pi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx + 2n\pi)}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = f(x)$$

$$\boxed{f \text{ est impaire et } 2\pi\text{-périodique.}}$$

(b) Soit $x \in]0,\pi[$. On remarque que pour $k \geqslant 1$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin(kx)}{k}$ est la primitive de $x \mapsto \cos(kx)$ qui s'annule en π. On peut donc écrire, avec le théorème fondamental de l'analyse, que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k} = \sum_{k=1}^{n} \int_{\pi}^{x} \cos(kt)\,\mathrm{d}t = \int_{\pi}^{x} \left(\sum_{k=1}^{n} \cos(kt) \right) \mathrm{d}t = \int_{\pi}^{x} C_n(t)\,\mathrm{d}t$$

On peut appliquer le résultat établi à la question 1 :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k} = \int_{\pi}^{x} \left(\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{2} \right) \mathrm{d}t = -\int_{x}^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\mathrm{d}t + \int_{x}^{\pi} \frac{1}{2}\mathrm{d}t$$

Ainsi, après calcul on a :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k} = \frac{\pi - x}{2} - \frac{1}{2}\int_{x}^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\mathrm{d}t}$$

4. Soit $x \in]0,\pi[$; pour tout $t \in [x,\pi]$, on pose $h(t) = \dfrac{1}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$.

(a) La fonction $t \mapsto \sin\frac{t}{2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[x,\pi]$ et ne s'annule pas (car $x \in]0,\pi[$), donc :

$$\boxed{h \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [x,\pi].}$$

h' étant en conséquence continue sur le segment $[x,\pi]$, il vient que :

$$\boxed{h' \text{ est bornée sur } [x,\pi].}$$

(b) Une intégration par parties permet d'écrire que :

$$\int_{x}^{\pi} h(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,\mathrm{d}t = \left[-h(t)\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{n+\frac{1}{2}} \right]_{x}^{\pi} + \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\int_{x}^{\pi} h'(t)\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,\mathrm{d}t$$

La fin du calcul fournit le résultat :

$$\boxed{\int_{x}^{\pi} h(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,\mathrm{d}t = \frac{2}{2n+1}\left(\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} + \int_{x}^{\pi} h'(t)\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,\mathrm{d}t \right).}$$

(c) On peut alors majorer l'intégrale du premier membre à l'aide de l'inégalité triangulaire et de l'inégalité de la moyenne :

$$\begin{aligned} \left| \int_{x}^{\pi} h(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,\mathrm{d}t \right| &\leqslant \frac{2}{2n+1}\left(\left| \frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \right| + \left| \int_{x}^{\pi} h'(t)\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,\mathrm{d}t \right| \right) \\ &\leqslant \frac{2}{2n+1}\left(\frac{1}{\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|} + \int_{x}^{\pi} \left| h'(t)\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t \right| \mathrm{d}t \right) \end{aligned}$$

On utilise enfin le fait que h' est bornée, c'est à dire qu'il existe $M > 0$ tel que $\forall t \in \mathbb{R},\ |h'(t)| \leqslant M$:

$$\left| \int_{x}^{\pi} h(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \frac{2}{2n+1}\left(\frac{1}{\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|} + M(\pi - x) \right)$$

L'expression à droite de l'inégalité a clairement une limite nulle lorsque n tend vers $+\infty$, donc par comparaison :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_{x}^{\pi} h(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,\mathrm{d}t = 0}$$

(d) On sait, d'après la question 3b, que pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0, \pi[$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k} = \frac{\pi - x}{2} - \frac{1}{2} \int_x^{\pi} h(t) \sin\big(n + \frac{1}{2}\big) t \, \mathrm{d}t$$

La question précédente montre ainsi par passage à la limite de cette expression lorsque n tend vers $+\infty$, que :

$$\forall x \in]0, \pi[, \;\; f(x) = \frac{\pi - x}{2}$$

La fonction f étant impaire, on a en conséquence :

$$\forall x \in]-\pi, 0[, \;\; f(x) = -f(-x) = -\frac{\pi + x}{2}$$

Il reste à utiliser la 2π-périodicité de f :

$$\forall x \in]\pi, 2\pi[, \;\; f(x) = f(x - 2\pi) = -\frac{\pi + x - 2\pi}{2} = \frac{\pi - x}{2}$$

Le résultat est de plus évident pour $x = \pi$: $f(\pi) = 0 = \dfrac{\pi - \pi}{2}$, ce qui permet de conclure :

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in]0, 2\pi[, \; f(x) = \frac{\pi - x}{2}.}$$

Partie III : Une majoration uniforme des sommes partielles de la série précédente

On conserve les notations de la partie précédente.

1. Soit $x \in]0, 2\pi[$.

(a) Soit (m, n) un couple d'entiers naturels tels que $1 \leqslant m < n$. En utilisant une transformation d'Abel, on obtient (avec $a_p = \dfrac{1}{p}$ et $b_p = \sin(px)$) :

$$\begin{aligned}
\sum_{p=m+1}^{n} \frac{\sin(px)}{p} &= \frac{S_n(x) - S_m(x)}{n} + \sum_{p=m+1}^{n-1} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) (S_p(x) - S_m(x)) \\
&= \frac{S_n(x)}{n} - \frac{S_m(x)}{n} + \sum_{p=m+1}^{n-1} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) S_p(x) \\
&\quad - S_m(x) \sum_{p=m+1}^{n-1} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right)
\end{aligned}$$

Par un télescopage, on peut simplifier cette expression :

$$\sum_{p=m+1}^{n} \frac{\sin(px)}{p} = \frac{S_n(x)}{n} - \frac{S_m(x)}{n} + \sum_{p=m+1}^{n-1} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) S_p(x) - S_m(x) \left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{n}\right)$$

et on en déduit, après simplification, que pour tout couple (m, n) d'entiers naturels tels que $1 \leqslant m < n$, on a :

$$\boxed{\sum_{p=m+1}^{n} \frac{\sin(px)}{p} = \frac{S_n(x)}{n} + \sum_{p=m+1}^{n-1} S_p(x) \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) - \frac{S_m(x)}{m+1}.}$$

(b) L'inégalité triangulaire, appliquée au résultat précédent, donne :

$$\left|\sum_{p=m+1}^{n} \frac{\sin(px)}{p}\right| \leqslant \frac{|S_n(x)|}{n} + \sum_{p=m+1}^{n-1} |S_p(x)| \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) + \frac{|S_m(x)|}{m+1}$$

On peut ensuite utiliser la majoration établie à la question 2 de la partie II :

$$\left|\sum_{p=m+1}^{n} \frac{\sin(px)}{p}\right| \leqslant \frac{1}{n\left|\sin\frac{x}{2}\right|} + \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|} \sum_{p=m+1}^{n-1} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) + \frac{1}{(m+1)\left|\sin\frac{x}{2}\right|}$$

Puis, en appliquant un télescopage et le fait que $\sin\frac{x}{2} > 0$ (car $x \in]0, 2\pi[$) :

$$\left|\sum_{p=m+1}^{n} \frac{\sin(px)}{p}\right| \leqslant \frac{1}{n\sin\frac{x}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{x}{2}} \left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{(m+1)\sin\frac{x}{2}}$$

On en déduit, après simplification, que

$$\boxed{\left|\sum_{p=m+1}^{n} \frac{\sin(px)}{p}\right| \leqslant \frac{2}{(m+1)\sin\left(\frac{x}{2}\right)}}$$

La série $\displaystyle\sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin(px)}{p}$ est convergente d'après la question 2 de la partie II. La somme partielle ci dessus a donc une limite lorsque n tend vers l'infini. Par passage à cette limite, on a conservation des inégalités larges, c'est à dire :

$$\boxed{\left|\sum_{p=m+1}^{+\infty} \frac{\sin(px)}{p}\right| \leqslant \frac{2}{(m+1)\sin\left(\frac{x}{2}\right)}}$$

2. Soit $x \in]0, \pi]$. On note k la partie entière de $\dfrac{\pi}{x}$: $k = E\left(\dfrac{\pi}{x}\right)$; on a donc $k \geqslant 1$.

(a) Remarquons que par définition de la partie entière :

$$\frac{\pi}{x} - 1 < k = E\left(\frac{\pi}{x}\right) \leqslant \frac{\pi}{x}$$

ce qui entraîne :

$$0 \leqslant \pi - x < kx \leqslant \pi$$

De plus, pour $1 \leqslant p \leqslant k$, on a $0 \leqslant px \leqslant kx \leqslant \pi$. On sait par ailleurs que pour $t \in [0, \pi]$, on a $0 \leqslant \sin t \leqslant t$ (une petite étude de fonction le prouve facilement), ce qui entraîne :

$$0 \leqslant \sin(px) \leqslant px \quad \text{pour } 1 \leqslant p \leqslant k$$

En effectuant la sommation, on a :

$$\sum_{p=1}^{k} \frac{\sin(px)}{p} \leqslant \sum_{p=1}^{k} \frac{px}{p} = \sum_{p=1}^{k} x = kx$$

On a en résumé :

$$\boxed{0 \leqslant \sum_{p=1}^{k} \frac{\sin(px)}{p} \leqslant kx \leqslant \pi}$$

(b) Étudions la fonction $\theta \mapsto \sin\theta - \dfrac{2}{\pi}\theta$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. En dérivant, on a :

$$\forall \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad h'(\theta) = \cos\theta - \frac{2}{\pi}$$

puis en dérivant une seconde fois :

$$\forall \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad h''(\theta) = -\sin\theta < 0$$

— La fonction h' est strictement décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, et $h'(0) > 0$, $h'\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$, donc h' ne s'annule qu'une fois (en un nombre α) sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

— La fonction h est croissante sur $[0, \alpha]$, décroissante sur $\left[\alpha, \frac{\pi}{2}\right]$, et $h(0) = h\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Cette fonction est donc positive sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

On peut conclure :

$$\boxed{\text{Si } \theta \in \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right], \text{ alors } \sin\theta \geqslant \frac{2}{\pi}\theta.}$$

(c) Soit $n \geqslant k+1$; le résultat de la question 1b permet d'écrire :

$$\left|\sum_{p=k+1}^{n} \frac{\sin(px)}{p}\right| \leqslant \frac{2}{(k+1)\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Puisque $\frac{x}{2} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, on peut appliquer le résultat de la question précédente :

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) \geqslant \frac{2}{\pi}\frac{x}{2} \quad \text{et :} \quad \left|\sum_{p=k+1}^{n} \frac{\sin(px)}{p}\right| \leqslant \frac{2}{(k+1)\frac{2}{\pi}\frac{x}{2}} = \frac{2}{(k+1)\frac{x}{\pi}}$$

On a vu que en 2a que $kx \geqslant \pi - x$, ce qui entraîne $(k+1)x \geqslant \pi$, ou encore $(k+1)\dfrac{x}{\pi} \geqslant 1$. Ainsi :

$$\boxed{\left|\sum_{p=k+1}^{n} \frac{\sin(px)}{p}\right| \leqslant 2}$$

3. Pour $x \in]0, \pi]$, avec les notations et les résultats précédents, l'inégalité triangulaire donne :

$$\left|\sum_{p=1}^{n} \frac{\sin(px)}{p}\right| \leqslant \left|\sum_{p=1}^{k} \frac{\sin(px)}{p}\right| + \left|\sum_{p=k+1}^{n} \frac{\sin(px)}{p}\right| \leqslant \pi + 2$$

Ce résultat est vrai encore pour $x = 0$, puis sur $[-\pi, \pi]$ puisque la fonction $x \mapsto \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{\sin(px)}{p}$ est impaire. Enfin, il reste vrai sur $\mathbb{R}$ car cette fonction est 2π-périodique.
On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$\boxed{\left|\sum_{p=1}^{n} \frac{\sin(px)}{p}\right| \leqslant 2 + \pi}$$