Devoir en temps libre n°2 de Mathématiques

Exercice 1

L'objectif de ce problème est d'étudier une méthode de détermination d'un développement en série entière en passant par le théorème d'existence et d'unicité des solutions d'une équation différentielle linéaire du premier ordre vérifiant une condition initiale donnée.

1. Donner l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.
2. Donner les développements en série entière (en précisant les rayons de convergence) des fonctions :
$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{et} \quad x \mapsto \arcsin x$$
Est-il possible d'en déduire celui de la fonction f ? Quelle est la difficulté rencontrée ?
3. Montrer que la fonction f est solution sur un intervalle à préciser de l'équation différentielle :
$$(E) : \ (1-x^2)y' - xy = 1, \quad \text{avec } y(0) = 0$$
4. On considère dans cette question une fonction définie par une série entière :
$$g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$
définie sur un intervalle $]-R, R[$, où R est le rayon de convergence de la série.
   (a) Montrer que g est solution de (E) avec $g(0) = 0$ si et seulement si :
$$a_0 = 0, \ a_1 = 1, \ \text{et } \forall n \geqslant 0, \ a_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} a_n$$
   (b) En déduire par récurrence que pour tout entier $k \geqslant 0$, on a :
$$a_{2k} = 0 \quad \text{et} \quad a_{2k+1} = \frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!}$$
   (c) En déduire l'expression de g. Quel est le rayon de convergence R de la série entière obtenue ?
5. En déduire que la fonction f est développable en série entière sur un intervalle à préciser et donner son développement.

Correction ▼ [se3]

Exercice 2

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{4-x^2}\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad v_n = \int_0^{1/2} \frac{x^n}{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

1. (a) Calculer u_0 et u_1.

   (b) Calculer $u_{n+2} - 4u_n$ en fonction de n. En déduire u_2 et u_3.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et strictement positive.
   En déduire qu'elle est convergente.
3. En majorant la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{4-x^2}$ sur $[0,1]$, déterminer la limite de la suite (u_n).
4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^{n-1}v_n$. En déduire la limite de la suite (v_n).
5. On pose, pour tout entier naturel n : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$, et $S'_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k$.

   (a) En minorant la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{4-x^2}$ sur $[0,1]$, déterminer la limite de la suite (S_n).

   (b) En déduire que le rayon de convergence de la série $\sum u_n z^n$ est égal à 1.
   Expliquer à l'aide de la question 4 pourquoi on peut en conclure que la suite (S'_n) converge.

   (c) Montrer que $S'_n = \displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1}{(1-x^2)(1-x)}\,\mathrm{d}x - \int_0^{1/2} \frac{x^{n+1}}{(1-x^2)(1-x)}\,\mathrm{d}x$.

   (d) Calculer $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1}{(1-x^2)(1-x)}\,\mathrm{d}x$ à l'aide d'une décomposition en éléments simples du type :

   $$\frac{1}{(1-x^2)(1-x)} = \frac{\alpha}{1-x} + \frac{\beta}{(1-x)^2} + \frac{\gamma}{1+x}$$

   (e) Montrer pour tout entier n l'encadrement suivant :

   $$0 \leqslant \int_0^{1/2} \frac{x^{n+1}}{(1-x^2)(1-x)}\,\mathrm{d}x \leqslant 2v_{n+1}$$

   (f) Déduire des deux questions précédentes la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S'_n$.

Correction ▼ [is3]

Corrigé du DM 2 :

Correction de l'exercice 1 ▲

1. On sait que la fonction arcsin est définie sur $[-1,1]$.
   De plus $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est définie pour :
   $$1-x^2=(1-x)(1+x)>0,$$
   c'est à dire pour $x \in]-1,1[$ (faire un tableau de signes). Finalement :
   $$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est définie sur }]-1,1[.}$$
2. Rappelons que :
   $$\frac{1}{\sqrt{1+u}}=(1+u)^{-1/2}=1+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2k-1}{2}\right)}{k!}u^k$$
   Il est possible d'affiner cette formule puisque :
   $$\begin{aligned}\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2k-1}{2}\right)}{k!} &= \frac{(-1)^k 1\times 3\times 5\times\cdots\times(2k-1)}{2^k k!}\\ &= \frac{(-1)^k(2k)!}{2^k k!\times 2\times 4\times\cdots\times(2k)!}=\frac{(-1)^k(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}\end{aligned}$$
   En composant par $(-x^2)$, on obtient :
   $$\boxed{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}x^{2k}\quad (R=1)}$$
   Le rayon de convergence est 1 car $|-x^2|=|x|^2<1 \Leftrightarrow |x|<1$. La fonction arcsin est la primitive de la précédente qui s'annule en 0, donc d'après le théorème d'intégration, on a pour tout $x\in]-1,1[$:
   $$\arcsin x \;=\; \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t=\int_0^x\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}t^{2k}\right)\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^x\frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}t^{2k}\,\mathrm{d}t$$
   Le calcul est immédiat :
   $$\boxed{\arcsin x=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(2k)!}{2^{2k}(2k+1)(k!)^2}x^{2k+1}\quad (R=1)}$$
   On ne sait pas, dans les limites du programme, faire un produit de séries entières. Il faut donc trouver un autre moyen d'effectuer celui de f. C'est pourquoi on propose de passer par une équation différentielle.
3. La fonction f est clairement dérivable sur $]-1,1[$ et :
   $$\forall x\in]-1,1[,\quad f'(x)=\frac{\arcsin'(x)}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{(-\frac{1}{2})(-2x)\arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}}=\frac{1}{(1-x^2)}+\frac{x\arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}}$$
   On peut donc constater que :
   $$(1-x^2)f'(x)-xf(x)=1+\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}=1$$
   Il est donc vérifié que :

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{La fonction } f \text{ est solution sur }]-1,1[\text{ de l'équation différentielle :}\\ (E):\ \ (1-x^2)y'-xy=1, \quad \text{avec } y(0)=0.\end{array}}$$

4. On considère dans cette question une fonction définie par une série entière :

$$g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

définie sur un intervalle $]-R,R[$, où R est le rayon de convergence de la série.

(a) Remarquons que g est dérivable sur $]-R,R[$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

On en déduit par substitution que :

$$\begin{aligned}
& g \text{ est solution de } (E)\\
\Leftrightarrow \quad & \forall x \in]-R,R[, \quad (1-x^2)\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - x\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 1\\
\Leftrightarrow \quad & \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{\substack{n=1\\(n=0)}}^{+\infty} n a_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} = 1
\end{aligned}$$

On rassemble les deux dernières sommes et on fait un décalage d'indice dans la première pour obtenir une somme unique (en retirant le premier terme de la première somme) :

$$\begin{aligned}
& g \text{ est solution de } (E)\\
\Leftrightarrow \quad & \sum_{n=-1}^{+\infty} (n+2)a_{n+2}x^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} = 1\\
\Leftrightarrow \quad & a_1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \Big((n+2)a_{n+2} - (n+1)a_n\Big)x^{n+1} = 1
\end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière, cette dernière condition équivaut à :

$$a_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 0,\ (n+2)a_{n+2} - (n+1)a_n = 1$$

On rajoute de plus la condition $g(0) = 0 = a_0$. Finalement :

$$\boxed{\begin{array}{c} g \text{ est solution de } (E) \text{ avec } g(0)=0 \text{ si et seulement si :}\\[1ex] a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ \text{et } \forall n \geqslant 0,\ a_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}a_n \end{array}}$$

(b) Montrons par récurrence que pour tout entier $k \geqslant 0$, on a :

$$a_{2k} = 0 \quad \text{et} \quad a_{2k+1} = \frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!}$$

$\star$ C'est clairement vrai pour $k=0$ puisque $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$.

⋆ Soit $k \geqslant 0$ fixé. On suppose que $a_{2k} = 0$ et $a_{2k+1} = \dfrac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!}$. Alors, d'une part :

$$a_{2k+2} = \frac{2k+1}{2k+2} a_{2k} = 0$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned} a_{2k+3} &= \frac{2k+2}{2k+3} a_{2k+1} = \frac{2k+2}{2k+3} \times \frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!} \\ &= \frac{(2k+2)^2 2^{2k}(k!)^2}{(2k+3)(2k+2)(2k+1)!} = \frac{2^{2k+2}((k+1)!)^2}{(2k+3)!} \end{aligned}$$

Donc les formules sont vraies au rang $k+1$.

⋆ En conclusion, on a montré par récurrence que :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \quad a_{2k} = 0 \quad \text{et} \quad a_{2k+1} = \frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!}}$$

(c) Il est donc immédiat que :

$$\boxed{\forall x \in]-R, R[, \quad g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!} x^{2k+1}}$$

On peut enfin déterminer R par le théorème de d'Alembert en posant, pour $x \neq 0$, $\alpha_k = \dfrac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!} x^{2k+1}$:

$$\begin{aligned} \frac{|\alpha_{k+1}|}{|\alpha_k|} &= \frac{2^{2k+2}((k+1)!)^2}{(2k+3)!} \times \frac{(2k+1)!}{2^{2k}(k!)^2} |x|^2 \\ &= \frac{2^2(k+1)^2}{(2k+3)(2k+2)} |x|^2 \underset{k \to +\infty}{\sim} \frac{4k^2}{4k^2} |x|^2 \underset{k \to +\infty}{\sim} |x|^2 \end{aligned}$$

Donc $\displaystyle\lim_{k \to +\infty} \frac{|\alpha_{k+1}|}{|\alpha_k|} = |x|^2 < 1$, si et seulement si $|x| < 1$.

D'après la règle de d'Alembert, la série converge absolument pour $|x| < 1$ et diverge grossièrement pour $|x| > 1$. Conclusion :

$$\boxed{\text{Le rayon de convergence de la série est } R = 1.}$$

5. Sur $]-1, 1[$, la recherche des solutions de l'équation différentielle revient à résoudre l'équation :

$$y' - \frac{x}{1-x^2} y = \frac{1}{1-x^2}$$

C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre.

On sait que ce type d'équation a une solution unique vérifiant $y(0) = 0$. Or f et g sont deux solutions sur $]-1, 1[$ de l'équation vérifiant cette condition, donc $f = g$.

Cette égalité prouve que f est développable en série entière sur $]-1, 1[$, et que :

$$\boxed{\forall x \in]-1, 1[, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!} x^{2k+1}}$$

Correction de l'exercice 2 ▲

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{4-x^2}\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad v_n = \int_0^{1/2} \frac{x^n}{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

1. (a) Calculons $u_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{4-x^2}\,\mathrm{d}x$. Une décomposition en éléments simples donne :

$$\frac{1}{4-x^2} = \frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x} = \frac{1}{4(2-x)} + \frac{1}{4(2+x)}$$

ce qui permet de calculer l'intégrale :

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{1}{4}\int_0^1 \left(\frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x}\right) \\ &= \frac{1}{4}\Big[-\ln(2-x)+\ln(2+x)\Big]_0^1 = \frac{\ln 3}{4} \end{aligned}$$

Pour le calcul de $u_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{4-x^2}\,\mathrm{d}x$, on peut directement utiliser une primitive :

$$u_1 = \Big[-\frac{1}{2}\ln(4-x^2)\Big]_0^1 = \frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}$$

On a en résumé :

$$\boxed{u_0 = \frac{\ln 3}{4} \quad \text{et} \quad u_1 = \frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}}$$

(b) $u_{n+2} - 4u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n+2}-4x^n}{4-x^2} = \int_0^1 \frac{x^n(x^2-4)}{4-x^2} = -\int_0^1 x^n = -\frac{1}{n+1}$.

$$\boxed{u_{n+2} - 4u_n = -\frac{1}{n+1}}$$

En utilisant cette relation, on a :

$$u_2 = 4u_0 - 1 = \ln 3 - 1 \quad \text{et} \quad u_3 = 4u_1 - \frac{1}{2} = 2\ln\frac{4}{3} - \frac{1}{2}$$

Soit :

$$\boxed{u_2 = \ln 3 - 1 \quad \text{et} \quad u_3 = 2\ln\frac{4}{3} - \frac{1}{2}}$$

2. La fonction $x \mapsto \dfrac{x^n}{4-x^2}$ est continue, positive, et non identiquement nulle sur $[0,1]$. Son intégrale sur $[0,1]$ est donc strictement positive. Ainsi :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est strictement positive.}}$$

Par ailleurs, on constate que :

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

et l'expression sous l'intégrale étant négative sur $[0,1]$, on peut en déduire que $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$, c'est à dire que :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0. On peut conclure :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est convergente.}}$$

3. Pour tout $x \in [0,1]$, on a :

$$\frac{1}{4-x^2} \leqslant \frac{1}{3} \qquad \text{et} \qquad \frac{x^n}{4-x^2} \leqslant \frac{x^n}{3}$$

et avec la conservation des inégalités par passage à l'intégrale, on obtient :

$$0 < u_n \leqslant \frac{1}{3}\int_0^1 x^n \,\mathrm{d}x = \frac{1}{3(n+1)}$$

Le théorème des gendarmes permet de conclure :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} u_n = 0}$$

4. Le changement de variable $x = 2t$ permet d'écrire pour $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1-x^2}\mathrm{d}x = \int_0^{1/2} \frac{2^n t^n}{4-4t^2}(2\,\mathrm{d}t) = 2^{n-1}\int_0^{1/2} \frac{t^n}{1-t^2}\mathrm{d}t$$

C'est à dire :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^{n-1} v_n}$$

On en déduit que $v_n = \dfrac{1}{2^{n-1}} u_n$ et comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ on a :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = 0}$$

5. On pose, pour tout entier naturel n : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$, et $S'_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k$.

   (a) Pour tout $x \in [0,1]$, on a :

$$\frac{1}{4-x^2} \geqslant \frac{1}{4} \qquad \text{et} \qquad \frac{x^n}{4-x^2} \geqslant \frac{x^n}{4}$$

   et avec la conservation des inégalités par passage à l'intégrale, on obtient :

$$u_n \geqslant \frac{1}{4}\int_0^1 x^n \,\mathrm{d}x = \frac{1}{4(n+1)}$$

   La série $\dfrac{1}{4}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ est une série de Riemann divergente (vers $+\infty$), donc par comparaison des termes généraux, la série $\sum u_n$ diverge vers $+\infty$, autrement dit :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty}$$

(b) On note R le rayon de convergence de la série $\sum u_n z^n$. On rappelle que :

$$R = \mathrm{Sup}\{r > 0, \quad \sum u_n r^n < +\infty\} = \mathrm{Sup}\{r > 0, \quad u_n r^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\}$$

Comme $\sum u_n$ diverge, on a $R \leqslant 1$, et comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a $R \geqslant 1$. D'où $R = 1$:

$$\boxed{\text{Le rayon de convergence de la série } \sum u_n z^n \text{ est } 1.}$$

On remarque ensuite avec la question 4 que :

$$S'_n = \sum_{k=0}^{n} v_n = 2\sum_{k=0}^{n} \frac{u_n}{2^n}$$

La suite (S'_n) est de même nature que la série entière $\sum u_n z^n$ pour $z = \dfrac{1}{2} \in]-1, 1[$. Ainsi :

$$\boxed{\text{La suite } (S'_n) \text{ converge.}}$$

(c) On peut écrire, en utilisant la linéarité de l'intégrale :

$$S'_n = \sum_{k=1}^{n} \int_0^{1/2} \frac{x^n}{1-x^2}\mathrm{d}x = \int_0^{1/2} \left(\frac{\sum_{k=1}^{n} x^n}{1-x^2}\right)\mathrm{d}x$$

Puis, compte tenu du fait que $\forall x \in [0, \frac{1}{2}]$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$:

$$S'_n = \int_0^{1/2} \frac{1-x^{n+1}}{(1-x^2)(1-x)}\mathrm{d}x$$

En séparant cette intégrale, on peut enfin écrire :

$$S'_n = \int_0^{1/2} \frac{1}{(1-x^2)(1-x)}\mathrm{d}x - \int_0^{1/2} \frac{x^{n+1}}{(1-x^2)(1-x)}\mathrm{d}x$$

(d) Il s'agit maintenant de trouver $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in [1, \frac{1}{2}]$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-x^2)(1-x)} &= \frac{\alpha}{1-x} + \frac{\beta}{(1-x)^2} + \frac{\gamma}{1+x} \\ &= \frac{(\gamma-\alpha)x^2 + (\beta-2\alpha)x + (\alpha+\beta+\gamma)}{(1-x^2)(1-x)} \end{aligned}$$

Par identification, on trouve $\alpha = \gamma = \dfrac{1}{4}$ et $\beta = \dfrac{1}{2}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \int_0^{1/2} \frac{1}{(1-x^2)(1-x)}\mathrm{d}x &= \frac{1}{4}\int_0^{1/2} \left(\frac{1}{1-x} + \frac{2}{(1-x)^2} + \frac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4}\left[-\ln(1-x) + \frac{2}{(1-x)} + \ln(1+x)\right]_0^{1/2} \\ \int_0^{1/2} \frac{1}{(1-x^2)(1-x)}\mathrm{d}x &= \frac{1}{4}\left(\ln 2 + 4 + \ln\frac{3}{2} - 2\right) \end{aligned}$$

La valeur de l'intégrale est obtenue :

$$\boxed{\int_0^{1/2} \frac{1}{(1-x^2)(1-x)}\mathrm{d}x = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\ln 3}$$

(e) Pour $x \in [1, \frac{1}{2}]$, on a $\dfrac{1}{1-x} \leqslant \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$, d'où :

$$0 \leqslant \frac{x^{n+1}}{(1-x^2)(1-x)} \leqslant 2\frac{x^{n+1}}{1-x^2}$$

La conservation des inégalités par passage à l'intégrale donne enfin :

$$\boxed{0 \leqslant \int_0^{1/2} \frac{x^{n+1}}{(1-x^2)(1-x)}\,\mathrm{d}x \leqslant 2v_{n+1}}$$

(f) On a vu que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_{n+1} = 0$, donc d'après la question précédente et le théorème des gendarmes, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{1/2} \frac{x^{n+1}}{(1-x^2)(1-x)}\,\mathrm{d}x = 0$$

L'expression obtenue à la question 5c et le calcul de la question 5d permettent de conclure :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S'_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\ln 3}$$
