Lycée Jean Perrin
Classe de TSI_2 À rendre pour le Vendredi 17 Novembre

Devoir en temps libre n°3 de Mathématiques

Problème : Pseudo inverse d'une matrice.

Le but de ce problème est de généraliser la notion d'inverse d'une matrice carrée à coefficients dans $\mathbb{R}$.

On notera $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrice carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{R}$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang p. Pour $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit les relations :

(1) $AXA = A$

(2) $XAX = X$

(3) $AX = XA$

Si (1) et (2) sont vérifiées, on dit que X est un inverse faible de M. Si (1), (2) et (3) sont vérifiées, on dit que X est un pseudo-inverse de A.

On admettra la technique du *produit par blocs de matrices*, qui s'effectue comme le produit usuel de matrices. Soit $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que :

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$$

avec $A_1, B_1 \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ $(1 \leqslant p \leqslant n-1)$, $A_2, B_2 \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{R})$, $A_3, B_3 \in \mathcal{M}_{n-p,p}(\mathbb{R})$ et $A_4, B_4 \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{R})$, alors :

$$MN = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1B_1 + A_2B_3 & A_1B_2 + A_2B_4 \\ A_3B_1 + A_4B_3 & A_3B_2 + A_4B_4 \end{pmatrix}$$

1. Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer M^3 et en déduire un inverse faible de M. Est-ce un pseudo-inverse ?
   Vérifier que $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est aussi un inverse faible de M. Est ce aussi un pseudo-inverse ?
2. On suppose A inversible et qu'il existe X vérifiant (1). Montrer dans ce cas que X est unique et qu'il s'agit d'un pseudo-inverse de A.
3. Dans cette question, on veut établir l'unicité du pseudo-inverse de A.
   On suppose que X et X' sont des pseudo-inverses de A.
   (a) En calculant $AXAX'$ de deux manières différentes, établir que $AX' = XA$.
   (b) En déduire que $X = X'$. Conclure.
4. On suppose que A admet un pseudo-inverse X. Prouver que les matrices suivantes ont un pseudo-inverse, et le calculer :
$$X, \quad \lambda A \ (\lambda \in \mathbb{R}^*), \quad A^k \ (k \in \mathbb{N}^*), \quad A^T, \quad Q^{-1}AQ \text{ avec } Q \text{ inversible..}$$
5. On suppose dans cette question que X vérifie (1), c'est à dire $AXA = A$.
   (a) Prouver que AX et XA sont des matrices de projection.
   (b) Montrer que si p est un projecteur de $\mathbb{R}^n$, on a $\text{Tr}(p) = \text{rg}(p)$.

(c) Soient u et v deux endomorphismes de $\mathbb{R}^n$. Montrer que :

$$\operatorname{rg}(u \circ v) \leqslant \operatorname{rg}(u) \quad \text{et} \quad \operatorname{rg}(u \circ v) \leqslant \operatorname{rg}(v)$$

Indication : On pourra comparer (au sens de l'inclusion) d'une part $\operatorname{Im}(u \circ v)$ *à* $\operatorname{Im} u$*, et d'autre part* $\operatorname{Ker}(u \circ v)$ *à* $\operatorname{Ker} v$*.*

(d) Déduire des questions précédentes que :

$$\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(AX) = \operatorname{rg}(XA) = \operatorname{Tr}(AX)$$

Par la suite, on note f (resp. g) l'endomorphisme de matrice A (resp. X) dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, et on tente de montrer le résultat suivant :

$$\boxed{A \text{ possède un pseudo inverse} \Longleftrightarrow \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f = E \qquad \mathbf{(1)}.}$$

6. On suppose dans cette question que A possède un pseudo inverse X.
   (a) Traduire les relations (1), (2) et (3) sur f et g.
   (b) Montrer que $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} g = \{0\}$
   (c) Montrer que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} g$. Conclure.
   (d) Justifier que $f \circ g$ est le projecteur sur $\operatorname{Im} f$ parallèlement à $\operatorname{Ker} f$.
7. On suppose dans cette question que $\operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f = E$, et on note $p = \operatorname{rg} f$.
   (a) Que peut-on dire concernant l'existence d'un pseudo-inverse si $p = 0$ ou si $p = n$?
   Par la suite, on suppose $0 < p < n$.
   (b) Justifier qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de f est de la forme (par blocs) :

   $$B = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   où B_1 est une matrice carrée inversible d'ordre p.
   (c) En déduire qu'il existe une matrice $Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

   $$BY = YB = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Justifier que Y est le pseudo inverse de B.
   (d) En déduire que A admet un pseudo inverse et le préciser en fonction de Y et de la matrice de passage P de la base canonique à la base $\mathcal{B}$.
8. Montrer que A admet un pseudo-inverse si et seulement si $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^2$ (on pourra utiliser **(1)**).
9. Préciser si A a un pseudo-inverse dans chacun des cas suivants et le calculer si c'est le cas (on pourra s'aider des questions 7 et 8) :
   (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
   (b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Correction du DM3.

1. Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a $M^3 = M$ et (1), (2) et (3) sont vérifiés avec $A = X = M$.
   M est donc un pseudo-inverse de M.
   Soit $M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On vérifie facilement les points (1) et (2), ce qui prouve que M' est un inverse faible de M. En revanche, on a :
   $$MM' = M' \quad \text{et} \quad M'M = M$$
   donc $MM' \neq M'M$, et M' n'est pas un pseudo-inverse de M.
2. On suppose A inversible et qu'il existe X vérifiant (1). Alors $AXA = A$, et en multipliant à gauche et à droite par A^{-1}, on trouve :
   $$A^{-1}AXAA^{-1} = A^{-1}AA^{-1} \quad \text{donc :} \quad X = A^{-1}$$
   On a ainsi $X = A^{-1}$ et les points (2) et (3) sont très facilement vérifiés, car :
   $$(2)\ A^{-1}AA^{-1} = A^{-1} \quad \text{et} \quad (3)\ AA^{-1} = A^{-1}A = I$$
3. Dans cette question, on veut établir l'unicité du pseudo-inverse de A.
   On suppose que X et X' sont des pseudo-inverses de A.
   (a) En utilisant (1), on a :
   $$AXAX' = (AXA)X' = AX'$$
   Ensuite, en utilisant (3) puis (2) :
   $$AXAX' = (AX)(AX') = (XA)(X'A) = X(AX'A) = XA$$
   Il est donc établi que :
   $$\boxed{AX' = XA}$$
   (b) On multiplie cette égalité à gauche par X', et d'après (2) :
   $$X' = X'(AX') = X'(XA) = X'AX$$
   On multiplie cette égalité à droite par X, et d'après (2) :
   $$X = (XA)X = (AX')X = X'AX$$
   On a finalement :
   $$\boxed{X' = X}$$
4. Par similitude avec les inverses de matrice, on vérifie que les matrices suivantes sont les pseudo-inverses des matrices proposées (car elles vérifient les points (1), (2) et (3)) :

Matrice :	X	λA	A^k	A^T	$Q^{-1}AQ$
Pseudo-inverse :	A	$\frac{1}{\lambda}X$	X^k	X^T	$Q^{-1}XQ$

   C'est immédiat pour X et λA.
   $\star$ Pour A^k, on a puisque X et A commutent :
   (1) $A^kX^kA^k = (AXA)^k = A^k$.

(2) $X^k A^k X^k = (XAX)^k = X^k$.
(3) $A^k X^k = X^k A^k$.

- $\star$ Pour A^T, on a :
  (1) $A^T X^T A^T = (AXA)^T = A^T$.
  (2) $X^T A^T X^T = (XAX)^T = X^T$.
  (3) $A^T X^T = (XA)^T = (AX)^T = X^T A^T$.
- $\star$ Pour $Q^{-1}AQ$, on a :
  (1) $(Q^{-1}AQ)(Q^{-1}XQ)(Q^{-1}AQ) = Q^{-1}(AXA)Q = Q^{-1}AQ$.
  (2) $(Q^{-1}XQ)(Q^{-1}AQ)(Q^{-1}XQ) = Q^{-1}(XAX)Q = Q^{-1}XQ$.
  (3) $(Q^{-1}AQ)(Q^{-1}XQ) = Q^{-1}(AX)Q = Q^{-1}(XA)Q = (Q^{-1}XQ)(Q^{-1}AQ)$.

5. On suppose dans cette question que X vérifie (1), c'est à dire $AXA = A$.

   (a) Calculons simplement :

$$\begin{array}{rcl} (AX)(AX) & = & (AXA)X = AX \\ (XA)(XA) & = & X(AXA) = XA \end{array}$$

   Ces calculs caractérisent des matrices de projection ($M^2 = M$).

$$\boxed{AX \text{ et } XA \text{ sont des matrices de projection.}}$$

   (b) On suppose que p est un projecteur de $\mathbb{R}^n$ de rang r. Alors :

$$\mathbb{R}^n = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p$$

   On choisit une base $(e_1, e_2, \ldots, e_r)$ de $\operatorname{Im} p$ et une base $(e_{r+1}, e_{k+2}, \ldots, e_n)$ de $\operatorname{Ker} p$. La famille $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base de E, et la matrice (par blocs) de p dans cette base est :

$$M = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Il est alors clair que $\operatorname{Tr}(p) = \operatorname{Tr}(M) = r = \operatorname{rg}(p)$.

$$\boxed{\text{Si } p \text{ est un projecteur de } \mathbb{R}^n, \text{ on a } \operatorname{Tr}(p) = \operatorname{rg}(p).}$$

   (c) Soient u et v deux endomorphismes de $\mathbb{R}^n$.

   - $\star$ Montrons que $\operatorname{Im}(u \circ v) \subset \operatorname{Im} u$:
     Si $y \in \operatorname{Im}(u \circ v)$, alors $\exists x \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$y = (u \circ v)(x) = u\big[v(x)\big] \in \operatorname{Im} u$$

     Donc l'inclusion est immédiate, et en passant aux dimensions, on a $\dim\big(\operatorname{Im}(u \circ v)\big) \leqslant \dim\big(\operatorname{Im} u\big)$. Autrement dit :

$$\boxed{\operatorname{rg}(u \circ v) \leqslant \operatorname{rg}(u)}$$

   - $\star$ Montrons que $\operatorname{Ker} v \subset \operatorname{Ker}(u \circ v)$:
     Si $x \in \operatorname{Ker} v$, alors $v(x) = 0$ et :

$$(u \circ v)(x) = u\big[v(x)\big] = u(0) = 0$$

     Donc on a l'inclusion, et en passant aux dimensions, on a $\dim\big(\operatorname{Ker} v\big) \leqslant \dim\big(\operatorname{Ker}(u \circ v)\big)$.
     Par le théorème du rang :

$$\dim\big(\operatorname{Im}(u \circ v)\big) = n - \dim\big(\operatorname{Ker}(u \circ v)\big) \leqslant n - \dim\big(\operatorname{Ker} v\big) \leqslant \dim\big(\operatorname{Im} v\big)$$

$$\boxed{\operatorname{rg}(u \circ v) \leqslant \operatorname{rg}(v)}$$

(d) AX et XA étant des projecteurs, on a d'après 5b :

$$\text{rg}(AX) = \text{Tr}(AX) = \text{Tr}(XA) = \text{rg}(XA)$$

De plus, d'après 5c :

$$\text{rg}(AX) \leqslant \text{rg}\, A$$

Enfin, en utilisant la relation (1) et 5c :

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(AXA) = \text{rg}\big((AX)A\big) \leqslant \text{rg}(AX)$$

On conclut :

$$\boxed{\text{rg}(A) = \text{rg}(AX) = \text{rg}(XA) = \text{Tr}(AX)}$$

6. On suppose dans cette question que A possède un pseudo inverse X.

(a) Les relations (1), (2) et (3) se traduisent sur f et g par :

$$(1)\ f \circ g \circ f = f \quad (2)\ g \circ f \circ g = g \quad (3)\ f \circ g = g \circ f$$

(b) Soit $y \in \text{Ker}\, f \cap \text{Im}\, g$. Alors $f(y) = 0$ et il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $y = g(x)$, et donc $f(y) = f \circ g(x) = 0$. On compose à gauche par g :

$$g \circ f \circ g(x) = g(0) = 0$$

et par ailleurs $g \circ f \circ g(x) = g(x) = y$, donc $y = 0$.

$$\boxed{\text{Ker}\, f \cap \text{Im}\, g = \{0\}}$$

(c) Soit $y \in \text{Im}\, f$, alors il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$y = g(x) \underset{(2)}{=} g \circ f \circ g(x) = g\big(f \circ g(x)\big) \in \text{Im}\, g$$

Ainsi $\text{Im}\, f \subset \text{Im}\, g$, et par symétrie des rôles, on a aussi $\text{Im}\, g \subset \text{Im}\, f$. En résumé :

$$\boxed{\text{Im}\, f = \text{Im}\, g}$$

D'après 6b et 6c, nous avons $\text{Ker}\, f \cap \text{Im}\, f = \text{Ker}\, f \cap \text{Im}\, g = \{0\}$, et avec le théorème du rang :

$$\dim(\text{Ker}\, f) + \dim(\text{Im}\, f) = n$$

On a en conclusion :

$$\boxed{\mathbb{R}^n = \text{Im}\, f \oplus \text{Ker}\, f}$$

(d) On sait d'après 5a que $f \circ g$ est un projecteur. Il s'agit donc du projecteur sur $\text{Im}(f \circ g)$ parallèlement à $\text{Ker}(f \circ g)$.

— On a vu en 5c que $\text{Im}(f \circ g) \subset \text{Im}\, f$, et en 5d que $\text{rg}(f \circ g) = \text{rg}(f)$, donc $\text{Im}(f \circ g) = \text{Im}\, f$.

— De plus, $f \circ g = g \circ f$, donc d'après 5c, on a $\text{Ker}(f \circ g) = \text{Ker}(g \circ f) \subset \text{Ker}\, f$. Comme $\text{rg}(f \circ g) = \text{rg}(f)$ alors d'après le théorème du rang : $\dim\big(\text{Ker}(f \circ g)\big) = \dim\big(\text{Ker}\, f\big)$. Finalement, $\text{Ker}(f \circ g) = \text{Ker}\, f$.

En résumé :

$$\boxed{f \circ g \text{ est le projecteur sur } \text{Im}\, f \text{ parallèlement à } \text{Ker}\, f.}$$

7. On suppose dans cette question que $\text{Im}\, f \oplus \text{Ker}\, f = E$, et on note $p = \text{rg}\, f$.

(a) Si $p=0$, alors A est la matrice nulle. Celle-ci est clairement son propre pseudo-inverse. Si $p=n$ alors A est inversible et d'après (2), A^{-1} est le pseudo-inverse de A. Par la suite, on suppose $0<p<n$.

(b) Comme $E=\operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$, on peut choisir une base $(e_1,\ldots,e_p)$ de $\operatorname{Im} f$ et une base $(e_{p+1},\cdots,e_n)$ et $\mathcal{B}=(e_1,\ldots,e_n)$ est alors une base de E. Comme $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ sont clairement stables par f (vérifiez le !), alors :

$$\boxed{B=\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(f)=\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

où B_1 est la matrice de la restriction de f au sous-espace $\operatorname{Im} f$ relativement à la base $(e_1,\ldots,e_p)$. B_1 est une matrice carrée d'ordre p et de rang p (car $\operatorname{rg} f=p$), donc B_1 est inversible.

(c) On pose $Y=\begin{pmatrix} B_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a alors en effectuant le produit matriciel par blocs :

$$BY=\begin{pmatrix} B_1B_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_1^{-1}B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=YB$$

En résumé :

$$\boxed{\text{Il existe } Y\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ telle que : } BY=YB=\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

On a immédiatement (1) $BYB=B$ et (2) $YBY=Y$ donc :

$$\boxed{Y \text{ est le pseudo inverse de } B.}$$

(d) En notant P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ à la base $\mathcal{B}$, on sait que $A=PBP^{-1}$, donc d'après 4 (avec $Q=P^{-1}$) :

$$\boxed{PYP^{-1} \text{ est le pseudo-inverse de } A.}$$

Les questions 6 et 7 ont permis d'établir le résultat qui suit :

$$\boxed{A \text{ possède un pseudo inverse} \iff \operatorname{Im} f\oplus\operatorname{Ker} f=E \qquad \textbf{(1)}.}$$

8. D'après (1), il s'agit de montrer maintenant :

$$\operatorname{Im} f\oplus\operatorname{Ker} f=E \iff \operatorname{rg} f=\operatorname{rg} f^2$$

$\Longrightarrow$) On suppose $\operatorname{Im} f\oplus\operatorname{Ker} f=E$.

Soit $y\in\operatorname{Im} f^2$, alors il existe $x\in E$ tel que $y=f^2(x)=f\big[f(x)\big]$. Donc $y\in\operatorname{Im} f$.
Ainsi $\operatorname{Im} f^2\subset\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{rg} f^2\leqslant\operatorname{rg} f$.

Soit $y\in\operatorname{Im} f$, , alors il existe $x\in E$ tel que $y=f(x)$. Or on peut écrire :

$$x=x_1+x_2 \quad \text{avec} \quad x_1=f(x_1')\in\operatorname{Im} f,\ \text{et } x_2\in\operatorname{Ker} f.$$

D'où $y=f(x)=f(x_1)+f(x_2)=f^2(x_1')\in\operatorname{Im} f^2$.

Ainsi $\operatorname{Im} f\subset\operatorname{Im} f^2$ et $\operatorname{rg} f\leqslant\operatorname{rg} f^2$. Finalement $\operatorname{rg} f=\operatorname{rg} f^2$.

$\Longleftarrow$) On suppose $\operatorname{rg} f=\operatorname{rg} f^2$. D'après le théorème du rang :

$$\dim(\operatorname{Ker} f)=n-\operatorname{rg} f=n-\operatorname{rg} f^2=\dim(\operatorname{Ker} f^2)$$

Comme $\operatorname{Ker} f\subset\operatorname{Ker} f^2$, on en déduit que $\operatorname{Ker} f=\operatorname{Ker} f^2$.

Soit $y\in\operatorname{Im} f\cap\operatorname{Ker} f$. Il existe $x\in E$ tel que $y=f(x)$ et on a $f(y)=f^2(x)=0$. D'où $y\in\operatorname{Ker} f^2=\operatorname{Ker} f$ et $x=f(y)=0$. On a prouvé :

$$\operatorname{Ker} f\cap\operatorname{Im} f=\{0\}$$

et le théorème du rang permet de conclure que $E=\operatorname{Ker} f\oplus\operatorname{Im} f$.

En considérant la matrice A de f dans la base canonique et l'équivalence (1), on vient d'établir :

$$\boxed{A \text{ admet un pseudo-inverse si et seulement si } \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^2.}$$

9. Préciser si A a un pseudo-inverse dans chacun des cas suivants et le calculer si c'est le cas (on pourra s'aider des questions 7 et 8) :

   (a) $A^2 = 0$ donc $\operatorname{rg} A^2 = 0 \neq 1 = \operatorname{rg} A$. D'après 8, A n'admet pas de pseudo-inverse.

   (b) $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, donc $\operatorname{rg} A^2 = 2 = \operatorname{rg} A$. D'après 8, A admet un pseudo-inverse.

   On peut calculer ce dernier en considérant l'endomorphisme associé à f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et une base de $\operatorname{Im} f$. Si $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on sait que :

   $$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(\varepsilon_1), f(\varepsilon_2), f(\varepsilon_3)) = \operatorname{Vect}((1,0,1),(0,1,0)) = \operatorname{Vect}(e_1, e_2)$$

   De plus, on trouve facilement $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}((1,0,-1)) = \operatorname{Vect}(e_3)$. On considère alors la matrice de passage de la base canonique à la base (e_1, e_2, e_3) :

   $$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   et la matrice de f dans la base (e_1, e_2, e_3) :

   $$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   car $f(e_1) = (2,0,2) = 2e_1$, $f(e_2) = (0,1,0) = e_2$ et $f(e_3) = 0$. En reprenant la démarche et les notations de la question 7, le pseudo-inverse de B est :

   $$Y = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   et le pseudo-inverse de A est :

   $$\boxed{X = PYP^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$