Devoir en temps libre n°4 de Mathématiques

Problème : Puissances et racines carrées de matrices.

On se propose d'étudier, dans des cas particuliers, les puissances et racines carrées de certains endomorphismes. Les deux parties A et B du sujet sont indépendantes.

A) On désigne par f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -7 \\ -8 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Montrer que f est diagonalisable.
2) Déterminer une base (v_1, v_2, v_3) de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de f et donner la matrice D de f dans cette nouvelle base.
3) Soit P la matrice de passage de la base canonique à la base (v_1, v_2, v_3) et un entier $m \geqslant 1$. Sans calculer l'inverse de P, exprimer A^m en fonction de D, P et P^{-1}.
4) Calculer P^{-1}, puis déterminer la matrice de f^m dans la base canonique.
5) Déterminer toutes les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec la matrice D trouvée à la question 2).
6) Montrer que si $H \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifie $H^2 = D$, alors H et D commutent.
7) Déduire de ce qui précède toutes les matrices H de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $H^2 = D$, puis déterminer tous les endomorphismes h de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $h^2 = f$ en donnant leur matrice dans la base canonique.

B) Soient f et j les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices respectives A et J dans la base canonique sont données par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Calculer J^m pour tout entier $m \geqslant 1$.
2) En déduire que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $f^m = \mathrm{Id} + \dfrac{1}{3}(4^m - 1)j$. Cette relation est-elle encore valable pour $m = 0$?
3) Montrer que f admet deux valeurs propres distinctes λ et μ telles que $\lambda < \mu$.
4) Montrer qu'il existe un unique couple (p, q) d'endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ tel que pour tout entier $m \geqslant 0$, $f^m = \lambda^m p + \mu^m q$, et montrer que ces endomorphismes p et q sont linéairement indépendants.
5) Après avoir calculé $p^2, q^2, p \circ q$ et $q \circ p$, trouver tous les endomorphismes h, combinaisons linéaires de p et q qui vérifient $h^2 = f$.
6) Montrer que f est diagonalisable et trouver une base de vecteurs propres de f. Écrire la matrice D de f, puis la matrice de p et q dans cette nouvelle base.
7) Déterminer une matrice K de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ non diagonale telle que $K^2 = I_2$, puis une matrice Y de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ non diagonale telle que $Y^2 = D$.
8) En déduire qu'il existe un endomorphisme h de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $h^2 = f$ qui n'est pas combinaison linéaire de p et q.
9) Montrer que tous les endomorphismes h de $\mathbb{R}^3$ qui vérifient $h^2 = f$ sont diagonalisables.

Correction du DM4.

A) On désigne par f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -7 \\ -8 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Cherchons le polynôme caractéristique de f :

$$\begin{aligned}
\chi_f(x) &= \det(xI - A) = \begin{vmatrix} x-8 & -4 & 7 \\ 8 & x+4 & -8 \\ 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} \\
&= (x-1)\begin{vmatrix} x-8 & -4 \\ 8 & x+4 \end{vmatrix} = (x-1)\begin{vmatrix} x-4 & -4 \\ 4-x & x+4 \end{vmatrix} \quad (C_1 \leftarrow C_1 - C_2) \\
\chi_f(x) &= (x-1)\begin{vmatrix} x-4 & -4 \\ 0 & x \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_2 + L_1)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\chi_f(x) = x(x-1)(x-4) \quad \text{et}\, \mathrm{Sp}(f) = \{0, 1, 4\}}$$

Le polynôme χ_f est scindé et à racines simples, donc :

$$\boxed{\text{L'endomorphisme } f \text{ est diagonalisable.}}$$

2) Cherchons les sous-espaces propres de f :

⋆ $E_0 = \mathrm{Ker}\, f$:

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{rcl} 8x + 4y - 7z &=& 0 \\ -8x - 4y + 8z &=& 0 \\ z &=& 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} y = -2x \\ z = 0 \end{array}\right.$$

On peut donc choisir $v_1 = (1, -2, 0)$.

⋆ $E_1 = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$:

$$\begin{aligned}
(A - I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &\iff \left\{\begin{array}{rcl} 7x + 4y - 7z &=& 0 \\ -8x - 5y + 8z &=& 0 \\ 0 &=& 0 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{lcr} 7x + 4y - 7z & = & 0 \\ -x + z = 0 & (5L_1 + 4L_2) & \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{l} x = z \\ y = 0 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

On peut donc choisir $v_2 = (1, 0, 1)$.

⋆ $E_4 = \mathrm{Ker}(f - 4\,\mathrm{Id})$:

$$\begin{aligned}
(A - 4I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &\iff \left\{\begin{array}{rcl} 4x + 4y - 7z &=& 0 \\ -8x - 8y + 8z &=& 0 \\ -3z &=& 0 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{l} z = 0 \\ y = -x \end{array}\right.
\end{aligned}$$

On peut donc choisir $v_3 = (1, -1, 0)$.

La base (v_1, v_2, v_3) ainsi choisie est une base de vecteurs propres de f et de plus :

$$\boxed{D = \mathcal{M}at_{(v_1,v_2,v_3)} f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}}$$

3) Montrons par récurrence sur $m \in \mathbb{N}^*$ que $A^m = PD^mP^{-1}$:

- ⋆ C'est clairement vrai pour $m = 1$ par la formule du changement de base.
- ⋆ Si on suppose que le résultat est vrai au rang m, alors :

$$A^{m+1} = A \times A^m = PDP^{-1} \times PD^mP^{-1} = PD \times D^mP = PD^{m+1}P^{-1}$$

car $PP^{-1} = I$. Le résultat est bien vrai au rang $m + 1$.

Par récurrence, on a établi :

$$\boxed{A^m = PD^mP^{-1} \quad \text{avec} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

4) Le calcul de P^{-1} s'effectue en inversant le système suivant :

$$P\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x + y + z = x' \\ -2x - z = y' \\ y = z' \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + y + z = x' \\ -x + y = x' + y' \quad (L_1 + L_2) \\ y = z' \end{cases}$$

$$P\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = y - x' - y' = -x' - y' + z' \\ y = z' \\ z = x' - x - y = 2x' + y' - 2z' \end{cases}$$

$$\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}}$$

D'après la question 4, la A^m matrice de f^m dans la base canonique est donnée par le calcul suivant :

$$A^m = PD^mP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\mathcal{M}at_{\mathcal{B}_0} = A^m = \begin{pmatrix} 2 \times 4^m & 4^m & 1 - 2 \times 4^m \\ -2 \times 4^m & -4^m & 2 \times 4^m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

5) Soit $H = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice qui commute avec D, alors :

$$\begin{pmatrix} 0 & b & 4c \\ 0 & e & 4f \\ 0 & h & 4i \end{pmatrix} = HD = DH = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ 4g & 4h & 4i \end{pmatrix}$$

Par identification des coefficients des matrices, on a $b = c = d = f = g = h = 0$, donc la matrice H est diagonale. Réciproquement, toute matrice diagonale commute avec D. En résumé :

$$\boxed{\text{Les matrices de } \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \text{ qui commutent avec la matrice } D \text{ sont les matrices diagonales.}}$$

6) Soit $H =$ vérifiant $H^2 = D$. Alors $DH = H^2H = H^3 = HH^2 = HD$. Ainsi :

$$\boxed{\text{Si } H^2 = D \text{ alors } H \text{ et } D \text{ commutent.}}$$

7) D'après les questions 6 et 5, les matrices H de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $H^2 = D$ sont des matrices diagonales. En notant $H = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, on trouve :

$$H^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Par identification, on a $a = 0$, $b = \pm 1$ et $c = \pm 2$. D'où :

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 2 \end{pmatrix}$$

Réciproquement, une matrice de cette forme vérifie clairement $H^2 = D$.

Les endomorphismes h de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $H^2 = D$ sont par conséquence les endomorphismes de matrice

$$M = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 2 \end{pmatrix} P^{-1}$$

Ce qui donne l'ensemble composé des 4 matrices suivantes :

$$\boxed{\left\{ \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ -4 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ -4 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -4 & -2 & 5 \\ 4 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -4 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}}$$

B) Soient f et j les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices respectives A et J dans la base canonique sont données par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Remarquons que :

$$J^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3J$$

Montrons que $J^m = 3^{m-1}J$ pour tout entier $m \geqslant 1$.

⋆ C'est clair pour $n = 1$.

⋆ Si c'est vrai au rang m, alors :

$$J^m = J \times J^{m-1} = J \times 3^{m-1}J = 3^{m-1}J^2 = 3^{m-1} \times 3J = 3^m J$$

Donc le résultat est vrai au rang m. Par récurrence, on a donc le résultat qui suit :

$$\boxed{J^m = 3^{m-1}J}$$

2) Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Remarquons que la matrice de f^m est A^m. Or $A = I + J$ et I et J commutent, ce qui autorise l'utilisation de la formule du binôme :

$$\begin{aligned}(I+J)^m &= \sum_{p=0}^{m} \binom{m}{p} J^p I^{m-p} = \\ &= I + \sum_{p=1}^{m} \binom{m}{p} 3^{p-1} J = I + \frac{1}{3}\left(\sum_{p=0}^{m} \binom{m}{p} 3^p - 1\right) J\end{aligned}$$

D'après la formule du binôme, on a aussi $\displaystyle\sum_{p=0}^{m} \binom{m}{p} 3^p = (3+1)^m = 4^m$ d'où

$$(I+J)^m = I + \frac{1}{3}(4^m - 1)J$$

c'est à dire :

$$\boxed{\text{Pour tout } m \in \mathbb{N}^*,\ f^m = \mathrm{Id} + \frac{1}{3}(4^m - 1)j.}$$

On constate très vite que cette relation est encore valable pour $m = 0$ (avec $f^0 = \mathrm{Id}$).

3) Calculons le polynôme caractéristique de f pour avoir les valeurs propres :

$$\begin{aligned}\chi_f(x) = \det(A - xI) &= \begin{vmatrix} x-2 & -1 & -1 \\ -1 & x-2 & -1 \\ -1 & -1 & x-2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x-4 & -1 & -1 \\ x-4 & x-2 & -1 \\ x-4 & -1 & x-2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x-4 & -1 & -1 \\ 0 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} \quad (L_2 \leftarrow L_2 - L_1,\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \\ \chi_f(x) &= (x-4)(x-1)^2\end{aligned}$$

$$\boxed{f \text{ admet deux valeurs propres distinctes } \lambda = 1 \text{ d'ordre 2, et } \mu = 4}$$

4) Procédons par un raisonnement du type analyse-synthèse :
— Analyse : On suppose qu'il existe un couple (p, q) d'endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ tel que pour tout entier $m \geqslant 0$, $f^m = \lambda^m p + \mu^m q = p + 4^m q$, alors :

$$\begin{cases} f^0 = p + q &= \mathrm{Id} \\ f = p + 4q &= \mathrm{Id} + j \end{cases}$$

Il vient alors $q = \frac{1}{3}j$ et $p = \mathrm{Id} - \frac{1}{3}j$ (ce qui assure l'unicité du couple en cas d'existence).
— Synthèse : Il reste à montrer réciproquement que ce couple convient. On vérifie que pour $m \geqslant 0$:

$$\begin{aligned}\lambda^m p + \mu^m q &= \left(\mathrm{Id} - \frac{1}{3}j\right) + \frac{4^m}{3}j \\ &= \mathrm{Id} + \frac{1}{3}(4^m - 1)j = f^m\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Il existe un unique couple } (p,q) \text{ d'endomorphismes de } \mathbb{R}^3 \text{ tel que pour tout entier } m \geqslant 0,\ f^m = \lambda^m p + \mu^m q.}$$

Montrons que les endomorphismes p et q sont linéairement indépendants. Soient α et β tels que $\alpha p + \beta q = 0$. Matriciellement, on a alors :

$$0 = \frac{\alpha}{3}J + \beta I - \frac{\beta}{3}J = \begin{pmatrix} \frac{\alpha+2\beta}{3} & \frac{\alpha-\beta}{3} & \frac{\alpha-\beta}{3} \\ \frac{\alpha-\beta}{3} & \frac{\alpha+2\beta}{3} & \frac{\alpha-\beta}{3} \\ \frac{\alpha-\beta}{3} & \frac{\alpha-\beta}{3} & \frac{\alpha+2\beta}{3} \end{pmatrix}$$

Par identification $\alpha = \beta = -2\beta$ donc $\alpha = \beta = 0$.

5) Avec les valeurs de p et q trouvées précédemment, on peut calculer :

$$\begin{aligned} p^2 &= (\operatorname{Id} - j/3)^2 = \operatorname{Id} - 2j/3 + j^2/9 = \operatorname{Id} - 2j/3 + j/3 = \operatorname{Id} - j/3 = p \\ q^2 &= j^2/9 = j/3 = q \\ p \circ q = q \circ p &= j/3(\operatorname{Id} - j/3) = j/3 - j^2/9 = j/3 - j/3 = 0 \end{aligned}$$

En résumé :

$$\boxed{p^2 = p, \quad q^2 = q, \quad q \circ p = p \circ q = 0}$$

En particulier, les endomorphismes p et q sont des projecteurs.

On cherche maintenant $h = \alpha p + \beta q$ tel que $h^2 = f$, alors :

$$f = \lambda p + \mu q = (\alpha p + \beta q)^2 = \alpha^2 p^2 + \alpha\beta(p \circ q + q \circ p) + \beta^2 q^2 = \alpha^2 p + \beta^2 q$$

Comme la famille (p,q) est libre, cette condition est réalisée si et seulement si $\alpha^2 = \lambda = 1$ et $\beta^2 = \mu = 4$, i.e. $\alpha = \pm 1$ et $\beta = \pm 2$.

$$\boxed{\text{Les endomorphismes } h \text{ vérifiant } h^2 = f \text{ sont } p + 2q,\ p - 2q,\ -p + 2q,\ -p - 2q.}$$

6) Connaissant les valeurs propres, déterminons les sous-espaces propres de f :

⋆ $E_1 = \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id})$:

$$(A - I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x + y + z = 0$$

Le sous-espace propre E_1 est donc un plan engendré par la famille $((1,-1,0),(1,0,-1))$.

⋆ $E_4 = \operatorname{Ker}(f - 4\operatorname{Id})$:

$$(A - 4I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{aligned} -2x + y + z &= 0 \\ x - 2y + z &= 0 \\ x + y - 2z &= 0 \end{aligned} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{aligned} -2x + y + z &= 0 \\ 3x - 3y &= 0 \quad (L_2 - L_1) \\ 3x - 3z &= 0 \quad (L_3 - L_1) \end{aligned} \right. \iff x = y = z$$

Le sous-espace propre E_4 est donc une droite engendré par $(1,1,1)$.

Il existe une base de vecteurs propres (χ_f est scindé et la multiplicité de chaque valeur propre correspond à la dimension du sous-espace propre associé), donc :

$$\boxed{f \text{ est diagonalisable.}}$$

On peut aussi remarquer (voir le chapitre sur les espaces euclidiens) que A est symétrique réelle et appliquer le théorème spectral.

$$\boxed{(v_1, v_2, v_3) = ((1,-1,0),(1,0,-1),(-1,1,1)) \text{ est une base de vecteurs propres de } f.}$$

De plus :

$$\boxed{D = \mathcal{M}at_{(v_1,v_2,v_3)}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}}$$

Avec $p = (4\,\mathrm{Id} - f)/3$ et $q = (f - \mathrm{Id})/3$, on trouve les matrices de p et q dans cette base :

$$\boxed{D_p = \mathcal{M}at_{(v_1,v_2,v_3)}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad D_h = \mathcal{M}at_{(v_1,v_2,v_3)}(q) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

On vérifie en passant que sont bien des matrices de projecteurs dont le produit est nul.

7) Les matrices suivantes (non diagonales) vérifient $K^2 = I_2$ et $Y^2 = D$:

$$\boxed{K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}}$$

8) On considère l'endomorphisme h de matrice Y dans la base (v_1, v_2, v_3).
On a $Y^2 = D$ donc $h^2 = f$. D'autre part, h n'est pas combinaison linéaire de p et q car Y n'est pas diagonale donc pas combinaison linéaire de D_p et D_q.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Il existe un endomorphisme } h \text{ de } \mathbb{R}^3 \text{ vérifiant } h^2 = f \text{ qui n'est pas} \\ \text{combinaison linéaire de } p \text{ et } q.\end{array}}$$

9) On suppose que $h^2 = f$. On note $H = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice de h dans la base (v_1, v_2, v_3). De même qu'à la partie A, on prouve que H commute avec D et :

$$\begin{pmatrix} a & b & 4c \\ d & e & 4f \\ g & h & 4i \end{pmatrix} = HD = DH = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 4g & 4h & 4i \end{pmatrix}$$

On en déduit que $c = f = g = h = 0$ puis :

$$H = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ d & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$$

On remarque que $h(v_3) = iv_3$ et comme $h^2(v_3) = 4v_3 = i^2 v_3$, on a $h(v_3) = \pm 2v_3$.
De plus, $h(v_1)$ et $h(v_2)$ appartiennent au plan $F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ et comme $H^2 = D$, la restriction de h^2 à ce plan est l'identité. $h_{|F}$ est donc une symétrie. Or on a vu qu'une symétrie était diagonalisable (de valeurs propres 1 ou -1), donc il existe une base de vecteurs propres (v_1', v_2') de $h_{|F}$. La matrice de h dans la base (v_1', v_2', v_3) est diagonale. On conclut :

$$\boxed{\text{Les endomorphismes } h \text{ de } \mathbb{R}^3 \text{ qui vérifient } h^2 = f \text{ sont diagonalisables.}}$$