Devoir en temps libre n°5 de Mathématiques

Exercice 1

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi(t) = \left|\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right|$$

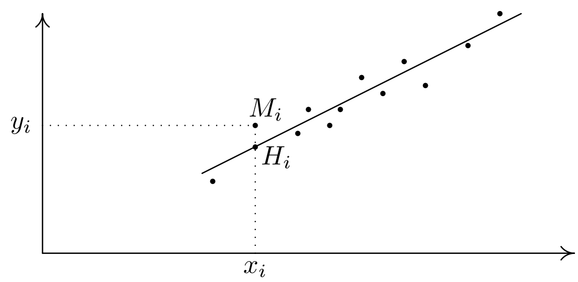
1. Donner l'allure de la représentation graphique de φ sur $[-2\pi, 2\pi]$.
2. L'application φ est-elle continue sur $\mathbb{R}$? de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$? de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$? On justifiera brièvement les réponses.
3. Déterminer les coefficients de Fourier a_n et b_n de φ. Préciser la convergence de la série de Fourier de φ.
4. Justifier la convergence et calculer les sommes $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}$

Correction ▼ [sf1]

Exercice 2 Droite de régression linéaire

Dans un repère orthonormé du plan, on considère un *nuage de points*, c'est-à-dire une famille de points $M_i(x_i, y_i)$, pour i compris entre 1 et n. Les x_i sont supposés deux à deux différents. Ce nuage représente une série statistique (par exemple un effectif en fonction du temps, un poids en fonction d'un âge, etc.).

Parfois, le nuage de points a une forme allongée qui fait penser qu'on peut tracer une droite autour de laquelle ces points sont répartis.



;

Une telle droite réalise ce qu'on appelle *un ajustement affine* du nuage.

Il faut décider quel critère on va adopter pour dire que la droite en question approche plus ou moins le nuage. On va démontrer en fait qu'il existe une droite et une seule qui minimise $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} M_iH_i^2$. Cette droite s'appelle *droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés*.

Dans le plan $\mathcal{P}$ euclidien muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les trois points :

$$M_1(-1,-1) \quad ; \quad M_2(0,1) \quad ; \quad M_3(2,1)$$

Soit $(m,p) \in \mathbb{R}^2$. On cherche la droite $\mathcal{D} : y = mx + p$ qui minimise la grandeur :

$$\delta(m,p) = M_1H_1^2 + M_2H_2^2 + M_3H_3^2$$

où pour $1 \leqslant i \leqslant 3$, H_i est le point de $\mathcal{D}$ de même abscisse que $M_i(x_i, y_i)$. Une telle droite est la droite de régression linéaire de y en x associée au nuage de points (M_i).

1. Montrer que $\delta(m,p) = \sum_{i=1}^{3}(y_i - mx_i - p)^2$.
2. Montrer que l'application :

$$\begin{cases} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}^3 \\ P & \mapsto & \big(P(-1), P(0), P(2)\big) \end{cases}$$

   est un isomorphisme. En déduire qu'il existe un unique polynôme $Q \in \mathbb{R}_2[X]$ vérifiant :

$$\forall i \in \{1,2,3\},\ \ Q(x_i) = y_i$$

3. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire :

$$(P \,|\, Q) = \sum_{i=1}^{3} P(x_i)Q(x_i) = P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(2)Q(2)$$

   Montrer que $\delta(m,p) = \|Q - mX - p\|^2$.
4. En déduire que la droite $\mathcal{D}$ est le projeté orthogonal Q_0 du polynôme Q sur le plan $\mathrm{Vect}(1,X) = \mathbb{R}_1[X]$.
5. Construire une base orthonormée (Q_1, Q_2) à partir de la base $(1, X)$ par le procédé de Schmidt.
6. Donner l'expression de Q_0 en fonction de Q, Q_1 et Q_2. En déduire l'expression de la droite de régression linéaire $\mathcal{D}$.
7. Expliquer comment on peut adapter la recherche lorsque le nuage de points est :

$$M_1(1,1) \quad ; \quad M_2(2,3) \quad ; \quad M_3(3,2) \quad ; \quad M_4(4,3)$$

Correction ▼ [ep1]

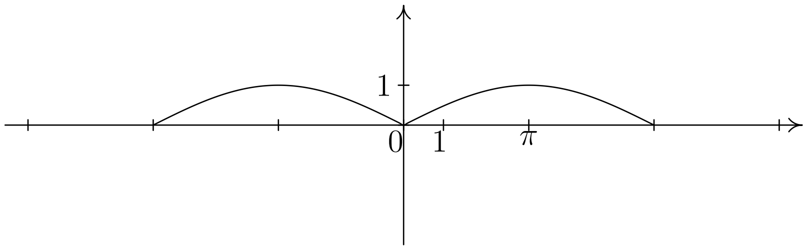
Corrigé du devoir :

Correction de l'exercice 1 ▲

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi(t) = \left|\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right|$$

1. Représentons la fonction φ sur $[-2\pi, 2\pi]$:



2. L'application φ sur $\mathbb{R}$ est composée des fonctions continues $t \mapsto |t|$ et $t \mapsto \sin\left(\frac{t}{2}\right)$, donc :

$$\boxed{\varphi \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

Remarquons que φ est 2π-périodique, puisque :

$$\forall t \in \mathbb{R},\quad \varphi(t+2\pi) = \left|\sin\left(\frac{t}{2}+\pi\right)\right| = \left|-\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right| = \left|\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right| = \varphi(t)$$

L'application φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, 2\pi[$. De plus :

$$\forall t \in]0, 2\pi[,\ \varphi(t) = \sin\left(\frac{t}{2}\right) \quad \text{et} \quad \forall t \in]0, 2\pi[,\ \varphi'(t) = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{t}{2}\right)$$

On observe que φ' a des limites finies en 0 et 2π, et ceci prouve que la restriction de φ à $[0, 2\pi]$ est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[0, 2\pi]$. Ainsi, en remarquant que la fonction φ est 2π-périodique :

$$\boxed{\varphi \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ par morceaux sur } \mathbb{R}.}$$

En revanche, $\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t<0}} \varphi'(t) = -\frac{1}{2} \neq \lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \varphi'(t) = \frac{1}{2}$.

$$\boxed{\varphi \text{ n'est pas de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

3. La fonction φ est paire, donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = 0}$$

Il reste à calculer a_n, pour $n = 0$:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin\left(\frac{t}{2}\right)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\left[-\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right]_0^{\pi} \end{aligned}$$

$$\boxed{a_0 = \frac{2}{\pi}}$$

et pour $n \geqslant 1$:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \varphi(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right) - \sin\left(\frac{(2n-1)t}{2}\right)\right]\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{2}{2n-1}\cos\left(\frac{(2n-1)t}{2}\right) + \frac{2}{2n+1}\cos\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)\right]_0^{\pi} \\
a_n &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{2}{2n-1} - \frac{2}{2n+1}\right] = \frac{2}{\pi} \times \frac{2n-1-(2n+1)}{(2n-1)(2n+1)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{-4}{\pi(4n^2-1)}}$$

La fonction φ est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, donc d'après le théorème de Dirichlet :

$$\boxed{\text{La série de Fourier de } f \text{ converge vers } f \text{ en tout point.}}$$

Autrement dit :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ \ f(t) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1}\cos(kt)}$$

4. Les sommes $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}$ convergent par équivalence de leurs termes généraux avec celui d'une série de Riemann. De plus :

$$f(0) = 0 = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1}$$

En isolant la somme cherchée, on obtient :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}}$$

Enfin, le théorème de Parseval s'applique puisque la fonction φ est continue par morceaux et 2π-périodique :

$$a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty} a_k^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi^2(t)\,\mathrm{d}t$$

avec :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin^2(t/2)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} (1-\cos(t))\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$$

d'où :

$$\frac{4}{\pi^2} + \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2} = \frac{1}{2}$$

En isolant la somme cherchée, on obtient :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}}$$

Correction de l'exercice 2 ▲

1. Remarquons que pour tout $i \in [\![1,3]\!]$, on peut calculer les composantes des vecteurs suivants :

$$\overrightarrow{M_iH_i} : \ (x_i - x_i, y_i - (mx_i + p)) = (0, y_i - mx_i - p)$$

Le calcul suivant est alors immédiat :

$$\boxed{\delta(m,p) = \sum_{i=1}^{3} \|\overrightarrow{M_iH_i}\|^2 = \sum_{i=1}^{3} (y_i - mx_i - p)^2}$$

2. Notons φ cette application. Soient $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcl}\varphi(\lambda P + \mu Q) & = & \big((\lambda P + \mu Q)(-1), (\lambda P + \mu Q)(0), (\lambda P + \mu Q)(2)\big) \\ & = & \big(\lambda P(-1) + \mu Q(-1), \lambda P(0) + \mu Q(0), \lambda P(2) + \mu Q(2)\big) \\ & = & \lambda\big(P(-1), P(0), P(2)\big) + \mu\big(Q(-1), Q(0), Q(2)\big) \\ \varphi(\lambda P + \mu Q) & = & \lambda\varphi(P) + \mu\varphi(Q)\end{array}$$

Donc l'application φ est linéaire. Par ailleurs, si $P \in \mathbb{R}_2[X]$:

$$\begin{array}{rcl}\varphi(P) = 0 & \Longrightarrow & \big(P(-1), P(0), P(2)\big) = (0,0,0) \\ & \Longrightarrow & P \text{ a trois racines distinctes.} \\ & \Longrightarrow & P = 0.\end{array}$$

En effet, un polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$ qui a plus de deux racines distinctes est le polynôme nul. L'application φ est donc injective, et comme de plus $\dim \mathbb{R}_2[X] = \dim \mathbb{R}^3 = 3$, on en déduit que :

$$\boxed{\text{L'application } \varphi \text{ est un isomorphisme.}}$$

En particulier, le triplet $(y_1, y_2, y_3) = (-1, 1, 1)$ a un unique antécédent Q par cette application, qui vérifie par définition :

$$\big(Q(x_1), Q(x_2), Q(x_3)\big) = \big(Q(-1), Q(0), Q(2)\big) = (-1, 1, 1) = (y_1, y_2, y_3)$$

ce qu'on peut reformuler de la façon suivante

$$\boxed{\text{Il existe un unique polynôme } Q \in \mathbb{R}_2[X] \text{ vérifiant : } \forall i \in \{1,2,3\},\ \ Q(x_i) = y_i}$$

3. On calcule simplement :

$$\begin{array}{rcl}\|Q - mX - p\|^2 & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{3} (Q - mX - p)(x_i)^2 = \sum_{i=1}^{3} (Q(x_i) - mx_i - p)^2 \\ & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{3} (y_i - mx_i - p)^2 = \delta(m,p)\end{array}$$

On a bien :

$$\boxed{\delta(m,p) = \|Q - mX - p\|^2}$$

4. On déduit de cette constatation que la droite $\mathcal{D} : y = mx + p$ est la droite qui minimise la distance $\|Q - mX - p\|^2$. Or, on sait que ce minimum est atteint lorsque $mX + p$ est le projeté orthogonal de Q sur $\mathbb{R}_1[X]$:

$$\boxed{\text{La droite } \mathcal{D} \text{ est le projeté orthogonal } Q_0 \text{ du polynôme } Q \text{ sur le plan } \operatorname{Vect}(1, X) = \mathbb{R}_1[X].}$$

5. On construit d'abord une base orthogonale (R_1, R_2) avec :

$$\begin{cases} R_1 &= 1 \\ R_2 &= X + \alpha \end{cases}$$

et la condition $(R_1 \mid R_2) = 0 = (1 \mid X) + \alpha(1 \mid 1)$, ce qui donne :

$$\alpha = -\frac{(1 \mid X)}{(1 \mid 1)} = -\frac{-1 + 0 + 2}{1 + 1 + 1} = -\frac{1}{3}$$

D'où $R_2 = X - \dfrac{1}{3}$. Enfin, il reste à calculer :

$$(R_2 \mid R_2) = \left(-\frac{4}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{42}{9} = \frac{14}{3}$$

$$\boxed{Q_1 = \frac{R_1}{\|R_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad Q_2 = \frac{R_2}{\|R_2\|} = \sqrt{\frac{3}{14}}\left(X - \frac{1}{3}\right)}$$

6. L'expression du projeté orthogonal $p(Q_0)$ de Q_0 sur le plan $\operatorname{Vect}(1, X)$ est donnée par :

$$\begin{aligned} p(Q_0) &= (Q_0 \mid Q_1)Q_1 + (Q_0 \mid Q_2)Q_2 \\ &= (y_1 Q_1(-1) + y_2 Q_1(0) + y_3 Q_1(2)) \times \frac{1}{\sqrt{3}} \\ &\quad + (y_1 Q_2(-1) + y_2 Q_2(0) + y_3 Q_2(2)) \times \sqrt{\frac{3}{14}}\left(X - \frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{8}{3} \times \frac{3}{14} \times \left(X - \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{7}X + \left(\frac{1}{3} - \frac{4}{21}\right) = \frac{4}{7}X + \frac{1}{7} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{D} \text{ a pour équation } y = \frac{4}{7}x + \frac{1}{7}.}$$

7. De manière générale, lorsqu'on a une famille de points $M_i(x_i, y_i)$, on peut introduire le produit scalaire :

$$(P \mid Q) = \sum_{i=1}^{n} P(x_i)Q(x_i)$$

L'application :

$$\begin{cases} \mathbb{R}_{n-1}[X] & \to & \mathbb{R}^n \\ P & \mapsto & (P(x_1), P(x_2), \ldots, P(x_n)) \end{cases}$$

est un isomorphisme. Il existe alors un unique polynôme Q tel que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad Q(x_i) = y_i$$

De même que précédemment, la droite de régression linéaire est le projeté orthogonal de Q sur le plan vectoriel $\mathbb{R}_1[X]$.

On pose : $\overline{x} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i$ et $\overline{y} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i$. On vérifie facilement que $(1, X - \overline{x})$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_1[X]$. Dans cette base, l'expression de $p(Q)$ est donnée par :

$$\begin{aligned} p(Q) &= \frac{(Q\,|\,1)}{(1\,|\,1)} \times 1 + \frac{(Q\,|\,X-\overline{x})}{(X-\overline{x}\,|\,X-\overline{x})} \times (X-\overline{x}) \\ &= \overline{y} + \frac{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \overline{xy}}{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \overline{x}^2}(X-\overline{x}) \end{aligned}$$

Finalement :

$$p(Q)(X) = \frac{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \overline{xy}}{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \overline{x}^2} X + \overline{y} - \frac{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \overline{xy}}{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \overline{x}^2}\overline{x}$$

En résumé, la droite cherchée est la droite d'équation $y = ax + b$, où

$$a = \frac{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \overline{x}\;\overline{y}}{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \overline{x}^2} \quad \text{et} \quad b = \overline{y} - a\overline{x}.$$

Cette droite passe évidemment par le point moyen de coordonnées $\overline{x} = \frac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i$ et $\overline{y} = \frac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i$.

Lorsque le nuage de points est :

$$M_1(1,1) \quad ; \quad M_2(2,3) \quad ; \quad M_3(3,2) \quad ; \quad M_4(4,3)$$

la formule donne la droite d'équation : $y = \dfrac{x}{2} + 1$.
