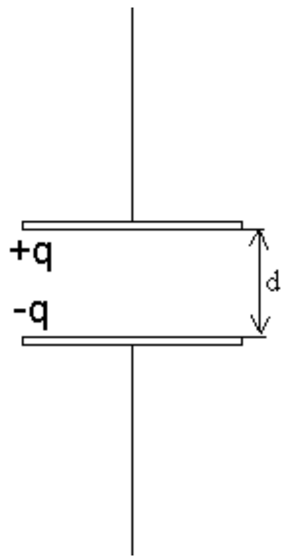
ÉLECTROMAGNÉTISME – Problème -2 (**)
Étude électromagnétique de la charge d'un condensateur plan

Le but de cet exercice est de donner une explication électromagnétique à la charge d'un condensateur plan en montrant que le vecteur de Poynting apporte l'énergie.

Un condensateur plan est constitué de deux disques coaxiaux de surface S en regard séparés par une distance **d** très inférieure au rayon r_0 des disques.



La surface latérale du cylindre de hauteur **d** formé par les deux disques sera notée S_0.

Le modèle est le suivant : les deux armatures seront considérées comme étant **des plans infinis et les effets de bord** seront négligés.

Les fils qui relient le condensateur au générateur de tension constante U_0 sont situés sur l'axe $\vec{u}_z$ des disques.
On utilisera la base cylindrique $(\vec{u}_r;\vec{u}_\theta;\vec{u}_z)$.

Une forte résistance R est placée en série avec le condensateur afin d'obtenir **une charge très lente**. Le temps caractéristique $\tau = RC$ de la charge est donc important.
Dans ces circonstances, la charge électrique du condensateur et le courant électrique évoluent très lentement.

De plus, les densités superficielles de charges électriques $\pm\sigma$ dépendent du temps mais sont **uniformes** sur les armatures.

1- Rappeler l'expression du champ électrostatique $\vec{E}$ entre les armatures et le représenter. Quelle est sa caractéristique ?

2- Par symétrie du système, la distribution des courants est radiale sur les deux armatures. Après une analyse des plans de symétrie et des opérations qui laissent invariante la distribution des courants, montrer que : $\vec{B} = B(r;z;t)\vec{u}_\theta$.

3- Montrer que l'équation de Maxwell-Ampère permet l'obtention des équations suivantes : $\frac{\partial B}{\partial z} = 0$ et $\frac{\partial B}{\partial r} + \frac{B}{r} = -\mu_0 \frac{d\sigma}{dt}$.

En déduire que : $\vec{B} = -\frac{1}{2}\mu_0 r \frac{d\sigma}{dt}\vec{u}_\theta$

4- Déterminer l'expression du champ magnétique sur le bord du condensateur en $r = r_0$. En déduire l'expression du vecteur de Poynting $\vec{\pi}$ sur la surface latérale du condensateur : $\vec{\pi} = -\frac{r_0}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\right)\vec{u}_r$.

5- En déduire l'expression de la puissance électromagnétique P qui **entre** dans le condensateur par sa surface latérale.

6- Montrer que : $P = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}\right)$ où C est la capacité du condensateur plan ($C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$).

7- L'expression du champ $\vec{B}$ est-elle en accord avec le fait que $\vec{E}$ ait été considéré comme uniforme ? On s'appuiera sur l'équation de Maxwell-Faraday et on tiendra compte de la forte valeur de R et de τ.

On prendra :

$r_0 = 0{,}19m$; $R = 10M\Omega$; $d = 10^{-3}m$; $U_0 = 10V$; $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} S.I.$; $\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi 10^9}$