Sujets : Espaces préhilbertiens.

Énoncés des sujets :

Exercice 1

Dans tout le problème on confond polynôme et application polynomiale de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On note, pour tout k de $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}_k[X]$ le sous-espace de $\mathbb{R}[X]$ formé des polynômes de degré inférieur ou égal à k.

On définit l'ensemble $E = \{P \in \mathbb{R}_4[X] \ ; \ P(0) = P(4) = 0\}$ et le polynôme $W = X(X-4)$.

Partie I : Étude d'endomorphismes

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$.
   Pour tout polynôme Q de $\mathbb{R}_2[X]$, on note $\phi(Q) = WQ$.
2. Montrer que l'application $\phi : Q \mapsto WQ$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ sur E.
3. En déduire une base et la dimension de E.
   Pour tout polynôme Q de $\mathbb{R}_2[X]$, on considère le polynôme $\Delta(Q)$ défini par :
   $$\Delta(Q) = Q(X+1) - Q(X).$$
   Ainsi, par exemple, si $Q = X^2 - 3X + 5$, alors :
   $$\Delta(Q) = \big((X+1)^2 - 3(X+1) + 5\big) - \big(X^2 - 3X + 5\big) = 2X - 2$$
4. (a) Montrer que l'application Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
   (b) Déterminer, pour tout polynôme Q de $\mathbb{R}_2[X]$, le degré de $\Delta(Q)$ en fonction du degré de Q.
   (c) Déterminer le noyau et l'image de Δ.
   (d) Établir $\Delta \circ \Delta \circ \Delta = 0$.
5. On définit l'endomorphisme f de E suivant : $f = \phi \circ \Delta \circ \phi^{-1}$, où ϕ^{-1} désigne l'application réciproque de ϕ.
   (a) Montrer $f \circ f \circ f = 0$.
   (b) Déterminer une base du noyau de f et une base de l'image de f.
   (c) Démontrer que f admet une valeur propre et une seule et déterminer celle-ci. Donner une base et la dimension du sous-espace propre pour f associé à cette valeur propre.
   (d) Est-ce que f est diagonalisable ?

Partie II : Étude d'un produit scalaire On considère l'application $\langle .,. \rangle$ de $\mathbb{R}_4[X] \times \mathbb{R}_4[X]$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (P_1, P_2) \in \mathbb{R}_4[X] \times \mathbb{R}_4[X], \quad \langle P_1, P_2 \rangle = \sum_{k=0}^{4} P_1(k) P_2(k).$$

6. Montrer que $\langle .,. \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_4[X]$.
   On munit dorénavant $\mathbb{R}_4[X]$ de ce produit scalaire et de la norme associée $\|.\|$.
   On considère les trois polynômes suivants :
   $$L_1 = (X-2)(X-3), \quad L_2 = (X-1)(X-3), \quad L_3 = (X-1)(X-2).$$
7. Montrer que la famille (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
8. (a) Exprimer, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_2[X]$, les coordonnées de P dans la base (L_1, L_2, L_3) en fonction de $P(1), P(2), P(3)$.
   (b) Exprimer $\Delta(L_1), \Delta(L_2), \Delta(L_3)$ sur la base (L_1, L_2, L_3) de $\mathbb{R}_2[X]$ et en déduire que la matrice de l'endomorphisme Δ dans la base (L_1, L_2, L_3) de $\mathbb{R}_2[X]$ est $\begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 3/2 & 2 \end{pmatrix}$.

   On note pour tout i de $\{1,2,3\}$, $M_i = WL_i$.

9. (a) Montrer que pour tout i de $\{1,2,3\}$, $M_i(i)$ est non nul.

   On note alors pour tout i de $\{1,2,3\}$, $N_i = \dfrac{1}{M_i(i)} M_i$.

   (b) Montrer que (N_1, N_2, N_3) est une base orthonormée du sous-espace vectoriel E de $\mathbb{R}_4[X]$.

10. Déterminer la matrice de l'application linéaire ϕ dans les bases (L_1, L_2, L_3) de $\mathbb{R}_2[X]$ et (N_1, N_2, N_3) de E.

11. Déterminer la matrice de l'endomorphisme f dans la base (N_1, N_2, N_3) de E.

12. On note, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_4[X]$: $u(P) = \displaystyle\sum_{i=1}^{3} P(i) N_i$.

   (a) Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_4[X]$.

   (b) Montrer : $\forall P \in \mathbb{R}_4[X], \forall j \in \{1,2,3\}, \ \langle P - u(P), N_j \rangle = 0$.

   (c) En déduire que u est la projection orthogonale sur E.

   (d) Déterminer le projeté orthogonal de $Q = X^2(X-2)(X-3)$ sur E.

Correction ▼ [ep1]

Exercice 2

Pour $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, on définit, si c'est possible, le produit scalaire suivant :

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}[X], \quad (P \,|\, Q) = \int_0^1 \frac{P(x)Q(x)}{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x$$

1. Montrer que l'expression existe pour tous polynômes P et Q.
2. Montrer qu'il s'agit bien d'un produit scalaire.
3. Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^k}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x$. En déduire que :

$$\forall p, q \in \mathbb{N}, \quad (X^p \,|\, X^q) = \frac{2}{2p + 2q + 1}$$

4. Déterminer, grâce à la méthode de Schmidt, une base orthonormée (P_0, P_1) du sous-espace vectoriel $F = \mathrm{Vect}(1, X)$.
5. On se place dans le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$. Déterminer la matrice de la projection orthogonale p sur F dans la base $(1, X, X^2)$.
6. En déduire les valeurs de a et b telles que l'intégrale :

$$I(a,b) = \int_0^1 \frac{(x^2 - ax - b)^2}{\sqrt{x}}$$

   est minimale (on pourra interpréter cette intégrale en termes de distance).

Correction ▼ [ep2]

Exercice 3

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}_1[X]$ constitué des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 1.
Autrement dit, $\mathbb{R}_1[X] = \{aX + b, \quad (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$.
On désigne par φ l'application de $\mathbb{R}_1[X] \times \mathbb{R}_1[X]$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{R}_1[X] \times \mathbb{R}_1[X], \quad \varphi(P,Q) = \int_0^1 P(t)Q(t) \, \mathrm{d}t.$$

Par exemple, si $P = X + 1$ et $Q = X$, alors $\varphi(X+1, X) = \displaystyle\int_0^1 (t+1) \, \mathrm{d}t = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$.

I. Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_1[X]$.
   On notera par la suite $(P \,|\, Q) = \varphi(P,Q)$. La norme associée à ce produit scalaire sera notée $\|.\|$.
   Ainsi, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_1[X]$, $\|P\| = \sqrt{(P \,|\, P)}$.

II. Dans cette question, on se propose de montrer qu'il existe un unique polynôme P_0 de $\mathbb{R}_1[X]$ possédant la propriété suivante : $\forall P \in \mathbb{R}_1[X], \quad (P \mid P_0) = P(0)$.

On distinguera bien P_0 qui désigne un polynôme de $\mathbb{R}_1[X]$ et $P(0)$ qui représente la valeur du polynôme P en 0.

II.A. Soit P_0 un polynôme fixé de $\mathbb{R}_1[X]$.

Montrer que l'égalité $(P \mid P_0) = P(0)$ est vérifiée pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_1[X]$, si et seulement si, elle est vérifiée pour les deux polynômes $P = 1$ et $P = X$.

II.B. On pose : $P_0(X) = a_0 X + b_0$ où a_0 et b_0 désignent deux réels.

IIB.1 Calculer $(1 \mid P_0)$ et $(X \mid P_0)$ à l'aide de a_0 et b_0.

En déduire que $(P \mid P_0) = P(0)$ pour tout polynôme de $\mathbb{R}_1[X]$, si et seulement si :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}a_0 + b_0 = 1 \\ \dfrac{1}{3}a_0 + \dfrac{1}{2}b_0 = 0 \end{cases}$$

IIB.2 Conclure qu'il existe un unique polynôme P_0 de $\mathbb{R}_1[X]$ que l'on explicitera tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_1[X], \quad (P \mid P_0) = P(0).$$

III. On désigne par S l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{R}_1[X]$ tels que $\|P\| = 1$ et on se propose de déterminer la valeur maximale prise par $P(0)$ lorsque P décrit S en utilisant successivement deux méthodes différentes.

III.A **Première méthode.** On pose $P_1 = 1$.

IIIA.1 Vérifier que $\|P_1\| = 1$.

IIIA.2 En utilisant le procédé d'orthonormalisation de Schmidt, déterminer un polynôme P_2 de $\mathbb{R}_1[X]$ tel que (P_1, P_2) soit une base orthonormale de $\mathbb{R}_1[X]$.

IIIA.3 Montrer que les éléments de S sont exactement les polynômes de la forme $\cos(\theta)P_1 + \sin(\theta)P_2$, où θ décrit $\mathbb{R}$.

IIIA.4 Si $P = \cos(\theta)P_1 + \sin(\theta)P_2$, déterminer deux réels λ et θ_0 indépendants de θ et tels que $P(0) = \lambda\cos(\theta - \theta_0)$ pour tout réel θ.

IIIA.5 En déduire la valeur maximale prise par $P(0)$ lorsque P décrit S.

III.B **Deuxième méthode.**

IIIB.1 Rappeler l'énoncé de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et préciser les cas où cette inégalité est une égalité.

IIIB.2 En utilisant le résultat obtenu dans la partie II, montrer que :

$$\forall P \in S, \quad P(0) \leqslant \|P_0\|.$$

IIIB.3 Déterminer un polynôme P de S tel que $P(0) = \|P_0\|$.

IIIB.4 Retrouver ainsi d'une seconde manière la valeur maximale prise par $P(0)$ lorsque P décrit S.

Correction ▼ [ep3]

Exercice 4

Étude d'une intégrale

1. Justifier que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge et calculer sa valeur.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge.
   (a) Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que :
   $$\int_0^A t^{n+1}e^{-t}\,\mathrm{d}t = -A^{n+1}e^{-A} + (n+1)\int_0^A t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$
   (b) Déterminer (et justifier) la limite de $A^{n+1}e^{-A}$ quand A tend vers $+\infty$.
   (c) En déduire que $I_{n+1} = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{n+1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge et que $I_{n+1} = (n+1)I_n$.
3. Montrer alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $n!$.

Étude d'un produit scalaire

On rappelle que $\mathbb{R}_3[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à 3. Pour tous P et Q dans $\mathbb{R}_3[X]$, on pose :

$$\langle P, Q\rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

4. Justifier rapidement en utilisant 3 que, pour tous P et Q dans $\mathbb{R}_3[X]$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge.
5. Montrer que l'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X]\times\mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R} \\ (P,Q) & \mapsto & \langle P,Q\rangle \end{array}$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_3[X]$.

Construction d'une base orthogonale

Soit Φ l'application définie sur $\mathbb{R}_3[X]$ par :

$$\forall P\in\mathbb{R}_3[X],\ \ \Phi(P) = XP''(X) + (1-X)P'(X).$$

On rappelle que la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ est la famille $\mathcal{B}_c = (1, X, X^2, X^3)$.

6. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
7. Vérifier que la matrice de Φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.
8. Montrer alors que les valeurs propres de Φ sont $0, -1, -2$ et -3.
   L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable ?
9. Pour tout $k\in\{0,1,2\}$, déterminer un vecteur propre P_k de Φ associé à la valeur propre $-k$ et dont le coefficient dominant vaut 1.

   On précisera et on expliquera les calculs effectués.

   On supposera dans la suite que P_3 désigne un vecteur propre de Φ associé à la valeur propre -3 et de coefficient dominant égal à 1.
10. Soient P et Q dans $\mathbb{R}_3[X]$.
    (a) On pose $f : t\mapsto tP'(t)e^{-t}$. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$.
    Pour tout $t\geqslant 0$, exprimer $f'(t)$ en fonction de $\Phi(P)(t)$ et de e^{-t}.
    (b) Montrer que
    $$\langle \Phi(P), Q\rangle = \int_0^{+\infty} f'(t)Q(t)\,\mathrm{d}t.$$
    (c) En effectuant une intégration par parties dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^{A} f'(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$ avec $A\in\mathbb{R}$, montrer que
    $$\langle \Phi(P), Q\rangle = -\int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$
    (d) En déduire que $\langle \Phi(P), Q\rangle = \langle P, \Phi(Q)\rangle$.
11. On rappelle que, pour tout $i\in\{0,1,2,3\}$, P_i est un vecteur propre de Φ associé à la valeur propre $-i$.
    Soient i et j dans $\{0,1,2,3\}$ tels que $i\neq j$.
    En remarquant que $\langle\Phi(P_i), P_j\rangle = \langle P_i, \Phi(P_j)\rangle$, montrer que $(i-j)\langle P_i, P_j\rangle = 0$, puis que P_i et P_j sont orthogonaux.
12. En déduire que la famille (P_0, P_1, P_2, P_3) est une base de $\mathbb{R}_3[X]$ constituée de vecteurs 2 à 2 orthogonaux.

Correction ▼ [ep4]

Exercice 5

On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n, où n est un entier naturel.

I. Étude d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$

1) Soit l'application f définie sur $\mathbb{R}[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad f(P) = (2X-1)P' + (X^2 - X - 2)P''.$$

Montrer que f est une application linéaire de $\mathbb{R}[X]$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la restriction de f à $\mathbb{R}_n[X]$, notée f_n, est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

3) Donner la matrice M_n de f_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

4) Déterminer les valeurs propres de f_n et en déduire que f_n est diagonalisable.

5) Comment, à partir du spectre de f_n, peut-on déterminer le noyau de f_n et le rang de f_n ?

6) On suppose que $n \geqslant 2$. On note $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de f_n rangées par ordre croissant : $\lambda_0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$.

   Exprimer λ_k en fonction de k pour $k \in [\![0, n]\!]$.

   Montrer que si un polynôme P est un vecteur propre de f_n associé à la valeur propre λ_k, alors P est de degré k.

   Indication : on pourra raisonner sur le degré de P.

7) Montrer qu'il existe une unique famille $(P_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ de polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$, telle que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, P_k soit un polynôme unitaire de degré k et un vecteur propre de f.

8) Étude d'un cas particulier

   Dans cette question, on suppose $n = 3$.

   Donner la matrice M_3 de f_3 dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$, le spectre de f_3 et déterminer les polynômes P_0, P_1, P_2 et P_3.

   Rappel : la définition des polynômes P_k est donnée à la question précédente.

II. Étude d'un produit scalaire de $\mathbb{R}_n[X]$

On définit l'application φ par :

$$\forall (P, Q) \in \big(\mathbb{R}[X]\big)^2, \quad \varphi(P, Q) = \int_{-1}^{2} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t.$$

De façon usuelle, on confond un polynôme formel P et sa fonction polynomiale associée $t \mapsto P(t)$.

1) Montrer que φ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

   On note désormais $\varphi(P, Q) = \langle P, Q \rangle$ le produit scalaire de deux polynômes P et Q de $\mathbb{R}[X]$.

2) a) Montrer que :

$$\forall (P, Q) \in \big(\mathbb{R}[X]\big)^2, \quad \langle f(P), Q \rangle = -\int_{-1}^{2} (t^2 - t - 2)P'(t)Q'(t)\,\mathrm{d}t.$$

   b) En déduire que :

$$\forall (P, Q) \in \big(\mathbb{R}[X]\big)^2, \quad \langle f(P), Q \rangle = \langle P, f(Q) \rangle.$$

   c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que la famille de polynômes $(P_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ définie en I.7) est une famille orthogonale pour le produit scalaire $\langle ., . \rangle$.

3) (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que $P_k \in \big(\mathbb{R}_{k-1}[X]\big)^{\perp}$.

   (b) Déterminer le projeté orthogonal de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$.

   Indications : on pourra utiliser les résultats de I.8). On rappelle que $\mathbb{R}_1[X] = \text{Vect}(1, X)$.

Correction ▼ [ep5]

Exercice 6

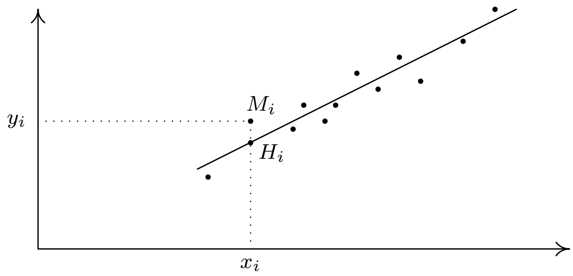
Problème CCP TSI 2011.

Correction ▼ [ep6]

Exercice 7

Dans un repère orthonormé du plan, on considère un *nuage de points*, c'est-à-dire une famille de points $M_i(x_i, y_i)$, pour i compris entre 1 et n. Les x_i sont supposés deux à deux différents. Ce nuage représente une série statistique (par exemple un effectif en fonction du temps, un poids en fonction d'un âge, etc.).

Parfois, le nuage de points a une forme allongée qui fait penser qu'on peut tracer une droite autour de laquelle ces points sont répartis.



;

Une telle droite réalise ce qu'on appelle *un ajustement affine* du nuage.
Il faut décider quel critère on va adopter pour dire que la droite en question approche plus ou moins le nuage. On va démontrer en fait qu'il existe une droite et une seule qui minimise $\sum_{i=1}^{n} M_iH_i^2$. Cette droite s'appelle *droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés.*
Dans le plan $\mathcal{P}$ euclidien muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les trois points :

$$M_1(-1,-1) \quad ; \quad M_2(0,1) \quad ; \quad M_3(2,1)$$

Soit $(m,p) \in \mathbb{R}^2$. On cherche la droite $\mathcal{D} : y = mx + p$ qui minimise la grandeur :

$$\delta(m,p) = M_1H_1^2 + M_2H_2^2 + M_3H_3^2$$

où pour $1 \leqslant i \leqslant 3$, H_i est le point de $\mathcal{D}$ de même abscisse que $M_i(x_i, y_i)$. Une telle droite est la droite de régression linéaire de y en x associée au nuage de points (M_i).

1. Montrer que $\delta(m,p) = \sum_{i=1}^{3}(y_i - mx_i - p)^2$.
2. Montrer que l'application :
$$\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}^3 \\ P & \mapsto & \big(P(-1), P(0), P(2)\big) \end{array}\right.$$
est un isomorphisme. En déduire qu'il existe un unique polynôme $Q \in \mathbb{R}_2[X]$ vérifiant :
$$\forall i \in \{1,2,3\},\ \ Q(x_i) = y_i$$
3. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire :
$$(P \,|\, Q) = \sum_{i=1}^{3} P(x_i)Q(x_i) = P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(2)Q(2)$$
Montrer que $\delta(m,p) = \|Q - mX - p\|^2$.
4. En déduire que la droite $\mathcal{D}$ est le projeté orthogonal Q_0 du polynôme Q sur le plan $\mathrm{Vect}(1,X) = \mathbb{R}_1[X]$.
5. Construire une base orthonormée (Q_1, Q_2) à partir de la base $(1, X)$ par le procédé de Schmidt.
6. Donner l'expression de Q_0 en fonction de Q, Q_1 et Q_2. En déduire l'expression de la droite de régression linéaire $\mathcal{D}$.
7. Expliquer comment on peut adapter la recherche lorsque le nuage de points est :
$$M_1(1,1) \quad ; \quad M_2(2,3) \quad ; \quad M_3(3,2) \quad ; \quad M_4(4,3)$$

Correction ▼ [ep01]

Exercice 8

On définit l'application ψ de $\mathbb{R}_3[X]^2$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}_3[X]^2 \quad \psi(P,Q) = \sum_{i=0}^{3} P(i)Q(i).$$

1. Montrer que ψ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_3[X]$.

2. Soit $F = \mathbb{R}_2[X]$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$.
   (a) Calculer $\psi(1,1), \psi(1,X), \psi(1,X^2), \psi(X,X), \psi(X,X^2)$ et $\psi(X^2,X^2)$.
   (b) On note $\mathcal{B}' = \{P_0, P_1, P_2\}$ la base orthonormale de F telle que :
   $$\forall k \in \{0,1,2\} \quad \mathrm{Vect}(P_0, \dots, P_k) = \mathrm{Vect}(1, \dots, X^k) \text{ et } \psi(P_k, X^k) > 0.$$
   Déterminer explicitement les polynômes P_0, P_1 et P_2.
3. Soit $(x_0, x_1, x_2, x_3) = (1, 3, 2, 3)$. On considère l'ensemble des sommes :
   $$\Sigma = \left\{ \sum_{i=0}^{3} \left[x_i - P(i)\right]^2 \ , \ P \in F \right\}.$$
   (a) Montrer qu'il existe un polynôme R, et un seul, de $\mathbb{R}_3[X]$ tel que :
   $$\forall i \in \{0,1,2,3\} \ \ R(i) = x_i.$$
   (b) Déterminer le projeté orthogonal du polynôme R sur le sous-espace vectoriel F.
   (c) Montrer alors que l'ensemble Σ possède un minimum atteint pour un polynôme $S \in F$ et un seul. Déterminer ce minimum.

Correction ▼ [ep02]

Exercice 9

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel.

On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel réel des polynômes réels en l'indéterminée X et $\mathbb{R}_n[X]$ le sous-espace vectoriel formé des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

On identifiera polynômes et fonctions polynomiales associées sur $[-1, 1]$.

Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $\dfrac{\mathrm{d}^k P}{\mathrm{d}x^k}$ la dérivée $k^{\text{ème}}$ d'un polynôme P.

On considère, pour $n \in \mathbb{N}$, les fonctions polynomiales définies sur I par :

$$U_n(x) = (x^2 - 1)^n \quad \text{et} \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{\mathrm{d}^n U_n}{\mathrm{d}x^n}(x)$$

En particulier, avec les conventions usuelles : $U_0(x) = P_0(x) = 1$.

A toute fonction polynomiale P, on associe le polynôme $L(P)$ défini sur I par :

$$L(P)(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(x^2 - 1)\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}(x)\right]$$

Partie I

Pour $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, on définit le produit scalaire (admis) :

$$(P \,|\, Q) = \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)\,\mathrm{d}x.$$

On note $\|.\|$ la norme euclidienne de $\mathbb{R}[X]$, muni de ce produit scalaire.

1. Montrer que L est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
2. On note L_n la restriction de l'endomorphisme L au sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$.
   2.a Montrer que L_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
   2.b Calculer $L_n(1)$, $L_n(X)$ et $L_n(X^k)$ pour tout $2 \leqslant k \leqslant n$.
   2.c Former la matrice de L_n relativement à la base canonique $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$. Observer que $(L(P) \,|\, Q) = (P \,|\, L(Q))$.

Partie II

1. 1.a Calculer directement P_1, P_2 et P_3.

   1.b Montrer que P_n est exactement de degré n et calculer le coefficient a_n de x^n dans P_n.

   1.c Justifier que $P_0, P_1, \dots, P_n$ forment une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. En utilisant la formule de Leibniz pour calculer $\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\big((x-1)^n(x+1)^n\big)$, établir que :

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 (x-1)^{n-k}(x+1)^k$$

   et en déduire les valeurs de $P_n(1)$ et $P_n(-1)$.

3. 3.a Vérifier les relations :

$$U'_{n+1}(x) - 2(n+1)xU_n(x) = 0, \tag{1}$$
$$(x^2-1)U'_n(x) - 2nxU_n(x) = 0. \tag{2}$$

   3.b En dérivant $n+1$ fois (1) et (2), montrer que la suite (P_n) vérifie :

$$P'_{n+1}(x) = xP'_n(x) + (n+1)P_n(x), \tag{3}$$
$$L(P_n) = n(n+1)P_n \tag{4}$$

   3.c En exploitant la relation (4) et le résultat de la question I.3, établir que si $m \neq n$, $(P_n \,|\, P_m) = 0$.

4. 4.a Montrer que pour tout $Q \in \mathbb{R}_n[X]$, $(P_{n+1} \,|\, Q) = 0$.

   4.b En introduisant un polynôme Q de la forme $\displaystyle\prod_{i=1}^{p}(X - a_i)$, montrer que le polynôme P_{n+1} possède exactement $n+1$ racines distinctes, toutes dans l'intervalle $]-1, 1[$.

5. 5.a Montrer que $(P'_{n+1} \,|\, P_n) = (n+1)\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\|P_n\|^2$.

   5.b A l'aide d'une intégration par parties, établir que : $\|P_n\|^2 = 2 - 2\displaystyle\int_{-1}^{1} xP_n(x)P'_n(x)\,\mathrm{d}x$.

   5.c En déduire que $\|P_n\|^2 = \dfrac{2}{2n+1}$.

6. Étant donné un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ et F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$, on note $d(P, F)$ la distance de P au sous-espace vectoriel F.

   Calculer $d(X^{n+1}, \mathbb{R}_n[X])$.

Correction ▼ [ep03]

Exercice 10

Dans tout le problème, E désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels. Pour tout entier naturel n, on note E_n le sous-espace de E formé par les polynômes de degré au plus égal à n.

Selon l'usage, on convient d'identifier un polynôme et la fonction polynomiale associée.

L'espace E_n est muni de sa base canonique $\mathcal{B}_n = (1, X, X^2, \cdots, X^n)$.

Les coefficients binomiaux sont notés $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$.

Partie A : Étude d'un endomorphisme

Étant donné un polynôme P de E, on définit un polynôme $\phi(P)$ par :

$$[\phi(P)](X) = (X^2-1)P''(X) + 2XP'(X).$$

1. Justifier qu'on a ainsi défini un endomorphisme ϕ de E.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n, le sous-espace vectoriel E_n est stable par ϕ.

   On notera désormais φ_n l'endomorphisme de E_n induit par ϕ sur E_n :

$$\forall P \in E_n, \quad \varphi_n(P) = \phi(P)$$

3. Dans cette question, on suppose que n est égal à 3.

3a. Écrire la matrice M_3 de φ_3 dans la base canonique de E_3.

3b. Justifier que φ_3 est diagonalisable.

3c. Déterminer une base de E_3 diagonalisant φ_3, formée de polynômes de coefficients dominants égaux à 1.

4. On revient au cas général d'un entier naturel n quelconque.

4a. Montrer que la matrice M_n de φ_n dans la base canonique est triangulaire supérieure et préciser ses éléments diagonaux.

4b. En déduire que φ_n est diagonalisable et préciser les dimensions de ses sous-espaces propres.

Partie B : Étude d'une famille de polynômes

Pour tout entier naturel n, on définit le polynôme L_n par

$$L_n(X) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 (X-1)^{n-k}(X+1)^k.$$

1. Calculer sous forme simplifiée les polynômes L_0, L_1, L_2 et L_3.
2. Calculer $L_n(1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Déterminer le degré de L_n en fonction de n ($n \in \mathbb{N}$) et donner son coefficient dominant sous la forme d'une somme.
4. En utilisant un changement d'indice, montrer que L_n a la même parité que n.
5. Vérifier, à l'aide de la formule de LEIBNIZ, que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ L_n(X) = \frac{1}{2^n n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}X^n}[(X^2-1)^n].$$

6. En déduire explicitement le coefficient dominant de L_n, puis la relation

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

7. Montrer alors que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R},\ \ |L_n(x)| \leqslant \left(\frac{1+|x|}{2}\right)^n \binom{2n}{n}.$$

8. On définit, pour tout entier naturel n, le polynôme $U_n(X) = (X^2-1)^n$.

8a. Vérifier que :

$$(X^2-1)U_n'(X) = 2nXU_n(X).$$

8b. En dérivant $n+1$ fois cette relation, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ \phi(L_n) = n(n+1)L_n.$$

Partie C : Définition d'un produit scalaire

On pose

$$\forall (P,Q) \in E^2,\ \ (P \,|\, Q) = \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)\,\mathrm{d}x.$$

On admet qu'il s'agit d'un produit scalaire sur E (et sur ses sous espaces E_n).

1. 1a. Montrer que

$$\forall (P,Q) \in E^2,\ \ (\phi(P) \,|\, Q) = \int_{-1}^{1} (1-x^2)P'(x)Q'(x)\,\mathrm{d}x.$$

1b. Que peut-on en déduire pour les endomorphismes φ_n ($n \in \mathbb{N}$) ?

1c. En déduire, à l'aide d'un résultat de la partie B, que les polynômes L_p sont deux à deux orthogonaux.

2. Soit n un entier naturel.

2a. Établir par récurrence sur k que

$$\forall k \in [\![0,n]\!]\,,\ \ (Q \,|\, L_n) = \frac{(-1)^k}{2^n n!} \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}[Q(x)] \frac{\mathrm{d}^{n-k}}{\mathrm{d}x^{n-k}}[(x^2-1)^n]\,\mathrm{d}x$$

2b. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, L_n est orthogonal à E_{n-1}.

2c. Retrouver ainsi que les polynômes L_p sont deux à deux orthogonaux.

3. 3a. À l'aide de C.2a, exprimer pour tout entier naturel n, $\|L_n\|^2$ en fonction de

$$I_n = \int_{-1}^{1} (x^2-1)^n \,\mathrm{d}x.$$

3b. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ I_{n+1} = -\frac{2n+2}{2n+3} I_n.$$

3c. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de I_n faisant intervenir des factorielles.

3d. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ \|L_n\| = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}.$$

3e. Donner, pour tout entier naturel n, une base orthonormée de E_n.

Partie D : Une relation de récurrence

Soit n un entier naturel non nul.

1. Calculer le coefficient de X^{n+1} dans $(n+1)L_{n+1}(X) - (2n+1)XL_n(X)$.
2. En déduire l'existence et l'unicité de $n+1$ réels α_k tels que

$$(n+1)L_{n+1}(X) - (2n+1)XL_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k L_k(X).$$

3. Montrer que $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\alpha_k = -(2n+1)\dfrac{(XL_n \mid L_k)}{\|L_k\|^2}$..
4. Pour tout $k \in [\![0,n-2]\!]$, vérifier que $(XL_n \mid L_k) = (L_n \mid XL_k)$ puis montrer que $\alpha_k = 0$.
5. Par des conditions de parité, montrer que $\alpha_n = 0$.
6. En utilisant la valeur des polynômes L_k au point 1, déterminer alors α_{n-1}.
7. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(n+1)L_{n+1}(X) - (2n+1)XL_n(X) + nL_{n-1}(X) = 0$.

Correction ▼ [ep04]

Corrigés des sujets :

Correction de l'exercice 1 ▲

Partie I : Étude d'endomorphismes

1. Le polynôme nul est clairement dans E. De plus, si $P, Q \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on trouve :

$$\begin{array}{rcl} (\lambda P + \mu Q)(0) & = & \lambda \underbrace{P(0)}_{=0} + \mu \underbrace{Q(0)}_{=0} = 0 \\ (\lambda P + \mu Q)(4) & = & \lambda \underbrace{P(4)}_{=0} + \mu \underbrace{Q(4)}_{=0} = 0 \end{array}$$

Donc $\lambda P + \mu Q \in E$.

$$\boxed{E \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}_4[X].}$$

2. • L'application ϕ est à valeur dans E, car si $Q \in \mathbb{R}_2[X]$, on a $\phi(Q) = WQ \in \mathbb{R}_4[X]$ et de plus :

$$\phi(Q)(0) = W(0)Q(0) = 0 \times Q(0) = 0 \ ; \ \phi(Q)(4) = W(4)Q(4) = 0 \times Q(4) = 0$$

• L'application ϕ est linéaire car si $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a :

$$\phi(\lambda P + \mu Q) = W(\lambda P + \mu Q) = \lambda WP + \mu WQ = \lambda \phi(P) + \mu \phi(Q)$$

• L'application ϕ est injective, car si $P \in \mathbb{R}_2[X]$:

$$\phi(P) = 0 \implies WP = 0 \underset{W \neq 0}{\implies} P = 0$$

• Enfin, l'application ϕ est surjective, car si $Q \in E$, on a $Q(0) = Q(4) = 0$, donc $W = X(X-4)$ divise Q et :

$$\exists P \in \mathbb{R}_2[X] \text{ tel que : } Q = WP = \phi(P)$$

$$\boxed{\text{L'application } \phi : Q \mapsto WQ \text{ est un isomorphisme de } \mathbb{R}_2[X] \text{ sur } E.}$$

3. On en déduit que $\dim E = \dim \mathbb{R}_2[X] = 3$, et qu'une base de E est formée par les images des éléments $\big(\phi(1), \phi(X), \phi(X^2)\big)$ de la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$:

$$\boxed{\dim E = 3 \text{ et } \big(X(X-4), X^2(X-4), X^3(X-4)\big) \text{ est une base de } E.}$$

4. (a) • Δ est linéaire car si $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcl} \Delta(\lambda P + \mu Q) & = & (\lambda P + \mu Q)(X+1) = (\lambda P + \mu Q)(X) \\ & = & \lambda P(X+1) + \mu Q(X+1) + \lambda P(X) + \mu Q(X) \\ & = & \lambda\big(P(X+1) - P(X)\big) + \mu\big(Q(X+1) - Q(X)\big) \\ \Delta(\lambda P + \mu Q) & = & \lambda \Delta(P) + \mu \Delta(Q) \end{array}$$

• Δ est à valeurs dans $\mathbb{R}_2[X]$ car :

$$\Delta(1) = 1 - 1 = 0 \ ; \ \Delta(X) = X + 1 - X = 1 \ ; \ \Delta(X^2) = (X+1)^2 - X^2 = 2X + 1$$

C'est à dire que les images par Δ des éléments de la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ sont dans $\mathbb{R}_2[X]$. En résumé :

$$\boxed{\Delta \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_2[X].}$$

(b) D'après le calcul précédent, si $Q = aX^2 + bX + c$ on a :

$$\Delta(Q) = a\Delta(X^2) + b\Delta(X) + c\Delta(1) = 2aX + (a+b)$$

Il est ainsi clair que le degré de $\Delta(Q)$ est :

$$\boxed{\deg(\Delta(Q)) = \left\{ \begin{array}{ll} -\infty & \text{si } \deg(Q) \leqslant 0 \\ \deg(Q) - 1 & \text{si } \deg(Q) = 1 \text{ ou } 2 \end{array} \right.}$$

(c) $\operatorname{Im}\Delta = \operatorname{Vect}\big(\Delta(1), \Delta(X), \Delta(X^2)\big) = \operatorname{Vect}(1, 2X+1) = \operatorname{Vect}(1, X)$, d'où :

$$\boxed{\operatorname{Im}\Delta = \mathbb{R}_1[X]}$$

D'après le théorème du rang on sait que $\dim \operatorname{Ker}\Delta = \dim \mathbb{R}_2[X] - \operatorname{rg}\Delta = 1$, et comme $1 \in \operatorname{Ker}\Delta$, en en déduit $\operatorname{Ker}\Delta = \operatorname{Vect}(1)$.

$$\boxed{\operatorname{Ker}\Delta = \mathbb{R}_0[X]}$$

(d) Si $Q = aX^2 + bX + c$, alors :

$$\begin{array}{rcl}
\Delta(Q) & = & 2aX + (a+b) \\
\Delta^2(Q) & = & \Delta(2aX + (a+b)) = 2a\Delta(X) + (a+b)\Delta(1) = 2a \\
\Delta^3(Q) & = & \Delta(2a) = 2a\Delta(1) = 0
\end{array}$$

En conclusion :

$$\boxed{\Delta \circ \Delta \circ \Delta = 0}$$

5. On définit l'endomorphisme f de E suivant : $f = \phi \circ \Delta \circ \phi^{-1}$, où ϕ^{-1} désigne l'application réciproque de ϕ.

(a) Il suffit de calculer :

$$\begin{array}{rcl}
f \circ f \circ f & = & (\phi \circ \Delta \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ \Delta \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ \Delta \circ \phi^{-1}) \\
& = & \phi \circ \Delta \circ (\phi^{-1} \circ \phi) \circ \Delta \circ (\phi^{-1} \circ \phi) \circ \Delta \circ \phi^{-1} \\
& = & \phi \circ (\underbrace{\Delta \circ \Delta \circ \Delta}_{=0}) \circ \phi^{-1}
\end{array}$$

On a bien ainsi établi que :

$$\boxed{f \circ f \circ f = 0.}$$

(b) Calculons les images de la base de E déterminée à la question 3 :

$$\begin{array}{rcl}
f\big(X(X-4)\big) & = & \phi \circ \Delta\big(\phi^{-1}(X(X-4)\big) = \phi\big(\Delta(1)\big) = \phi(0) = 0 \\
f\big(X^2(X-4)\big) & = & \phi \circ \Delta\big(\phi^{-1}(X^2(X-4)\big) = \phi\big(\Delta(X)\big) = \phi(1) = X(X-4) \\
f\big(X^3(X-4)\big) & = & \phi \circ \Delta\big(\phi^{-1}(X^3(X-4)\big) = \phi\big(\Delta(X^2)\big) = \phi(2X+1) \\
& = & X(X-4)(2X+1) = 2X^2(X-4) + X(X-4)
\end{array}$$

D'où $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\big(X(X-4), 2X^2(X-4) + X(X-4)\big) = \operatorname{Vect}\big(X(X-4), X^2(X-4)\big)$ et par le théorème du rang : $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(X(X-4))$:

$$\boxed{\big(X(X-4)\big) \text{ est une base du noyau de } f.}$$

$$\boxed{\big(X(X-4), X^2(X-4)\big) \text{ est une base de l'image de } f.}$$

(c) La matrice de f dans la base de E trouvée à la question 3 est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il est donc immédiat que $\chi_f = x^3$, et on conclut :

$$\boxed{0 \text{ est l'unique valeur propre de } f.}$$

Comme de plus le sous-espace propre E_0 associé est $\operatorname{Ker} f$:

$$\boxed{\dim E_0 = 1, \text{ et } \big(X(X-4)\big) \text{ est une base de } E_0.}$$

(d) Puisque la dimension de ce sous-espace propre est strictement inférieur à la multiplicité de la valeur propre :

$$\boxed{f \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

Partie II : Étude d'un produit scalaire On considère l'application $\langle .,. \rangle$ de $\mathbb{R}_4[X] \times \mathbb{R}_4[X]$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (P_1, P_2) \in \mathbb{R}_4[X] \times \mathbb{R}_4[X], \quad \langle P_1, P_2 \rangle = \sum_{k=0}^{4} P_1(k)P_2(k).$$

6. • L'application est symétrique car $\forall P_1, P_2 \in \mathbb{R}_4[X]$:

$$\langle P_1, P_2 \rangle = \sum_{k=0}^{4} P_1(k)P_2(k) = \sum_{k=0}^{4} P_2(k)P_1(k) = \langle P_2, P_1 \rangle$$

   • L'application est linéaire à gauche (donc bilinéaire) car $\forall P_1, Q_1, P_2 \in \mathbb{R}_4[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \langle \lambda P_1 + \mu Q_1, P_2 \rangle &= \sum_{k=0}^{4} (\lambda P_1 + \mu Q_1)(k)P_2(k) \\ &= \lambda \sum_{k=0}^{4} P_1(k)P_2(k) + \mu \sum_{k=0}^{4} Q_1(k)P_2(k) \\ \langle \lambda P_1 + \mu Q_1, P_2 \rangle &= \lambda \langle P_1, P_2 \rangle + \mu \langle Q_1, P_2 \rangle \end{aligned}$$

   • L'application est positive car $\forall P \in \mathbb{R}_4[X]$:

$$(P \mid P) = \sum_{k=0}^{4} P(k)^2 \geqslant 0$$

   • L'application est définie positive car $\forall P \in \mathbb{R}_4[X]$:

$$\begin{aligned} (P \mid P) = 0 &\implies \sum_{k=0}^{4} P(k)^2 = 0 \\ &\implies P(0) = P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = 0 \\ (P \mid P) = 0 &\implies P = 0, \text{ car } P \text{ est un polynôme de degré 4 avec 5 racines distinctes.} \end{aligned}$$

$$\boxed{\langle .,. \rangle \text{ est un produit scalaire sur } \mathbb{R}_4[X].}$$

   On munit dorénavant $\mathbb{R}_4[X]$ de ce produit scalaire et de la norme associée $\|.\|$.
   On considère les trois polynômes suivants :

$$L_1 = (X-2)(X-3), \quad L_2 = (X-1)(X-3), \quad L_3 = (X-1)(X-2).$$

7. Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que :

$$\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \lambda_3 L_3 = 0$$

   En particulier :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 L_1(1) + \lambda_2 L_2(1) + \lambda_3 L_3(1) = 0 = 2\lambda_1 \\ \lambda_1 L_1(2) + \lambda_2 L_2(2) + \lambda_3 L_3(2) = 0 = -\lambda_2 \\ \lambda_1 L_1(3) + \lambda_2 L_2(3) + \lambda_3 L_3(3) = 0 = 2\lambda_3 \end{array} \right.$$

   Donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. La famille (L_1, L_2, L_3) est une famille libre de 3 vecteurs de $\mathbb{R}_2[X]$ (de dimension 3), donc :

$$\boxed{(L_1, L_2, L_3) \text{ est une base de } \mathbb{R}_2[X].}$$

8. (a) Soit P de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que :

$$P = \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \lambda_3 L_3$$

   En particulier :

$$\left\{ \begin{array}{l} P(1) = \lambda_1 L_1(1) + \lambda_2 L_2(1) + \lambda_3 L_3(1) = 2\lambda_1 \\ P(2) = \lambda_1 L_1(2) + \lambda_2 L_2(2) + \lambda_3 L_3(2) = -\lambda_2 \\ P(3) = \lambda_1 L_1(3) + \lambda_2 L_2(3) + \lambda_3 L_3(3) = 2\lambda_3 \end{array} \right.$$

   Donc $\lambda_1 = \dfrac{1}{2}P(1)$, $\lambda_2 = -P(2)$ et $\lambda_3 = \dfrac{1}{2}P(3)$.

$$\boxed{P \text{ a pour coordonnées } \left(\frac{1}{2}P(1), -P(2), \frac{1}{2}P(3)\right) \text{ dans la base } (L_1, L_2, L_3).}$$

(b) On a ensuite (en utilisant la question précédente) :

$$\begin{aligned}
\Delta(L_1) &= L_1(X+1) - L_1(X) = L_3 - L_1 \\
\Delta(L_2) &= L_2(X+1) - L_2(X) = X(X-2) - L_2 \\
&= \left[-\frac{1}{2}L_1 + \frac{3}{2}L_3\right] - L_2 = -\frac{1}{2}L_1 - L_2 + \frac{3}{2}L_3 \\
\Delta(L_3) &= L_3(X+1) - L_3(X) = X(X-1) - L_3 \\
&= [-2L_2 + 3L_3] - L_3 = -2L_2 + 2L_3
\end{aligned}$$

Ces calculs prouvent que :

$$\boxed{A = \mathcal{M}at_{(L_1,L_2,L_3)}\Delta = \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 3/2 & 2 \end{pmatrix}}$$

On note pour tout i de $\{1,2,3\}$, $M_i = WL_i$.

9. (a) Il suffit de calculer :

$$\begin{aligned}
M_1(1) &= W(1)L_1(1) = -3 \times 2 = -6 \\
M_2(2) &= W(2)L_2(2) = -4 \times (-1) = 4 \\
M_3(3) &= W(3)L_2(2) = -3 \times 2 = -6
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } i \text{ de } \{1,2,3\},\ M_i(i) \text{ est non nul.}}$$

On note alors pour tout i de $\{1,2,3\}$, $N_i = \dfrac{1}{M_i(i)}M_i$.

(b) Il est clair que (N_1, N_2, N_3) est une famille de vecteurs de E. De plus, pour $i \in \{1,2,3\}$:

$$\begin{aligned}
\|N_i\|^2 &= \langle N_i, N_i\rangle = \frac{1}{M_i(i)^2}\langle M_i, M_i\rangle \\
&= \frac{1}{M_i(i)^2}\sum_{j=0}^{4}\underbrace{M_i(j)^2}_{=0 \text{ si } i\neq j} = \frac{1}{M_i(i)^2}M_i(i)^2 = 1
\end{aligned}$$

Et pour $k \in \{1,2,3\}$, $k \neq i$:

$$\begin{aligned}
\langle N_i, N_k\rangle &= \frac{1}{M_i(i)M_k(i)}\langle M_i, M_k\rangle \\
&= \frac{1}{M_i(i)M_k(i)}\sum_{j=0}^{4}\underbrace{M_i(j)M_k(j)}_{=0} = 0
\end{aligned}$$

En conclusion :

$$\boxed{(N_1, N_2, N_3) \text{ est une base orthonormée du sous-espace vectoriel } E \text{ de } \mathbb{R}_4[X].}$$

10. Remarquons que pour $i \in \{1,2,3\}$:

$$\phi(L_i) = WL_i = M_i = M_i(i)N_i$$

On a donc immédiatement :

$$\boxed{P = \mathcal{M}at_{(L_1,L_2,L_3),(N_1,N_2,N_3)}\phi = \begin{pmatrix} M_1(1) & 0 & 0 \\ 0 & M_2(2) & 0 \\ 0 & 0 & M_3(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}}$$

11. Comme $f = \phi \circ \Delta \circ \phi^{-1}$, on peut calculer :

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}at_{(N_1,N_2,N_3)}f &= P \times A \times P^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 3/2 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & -1/6 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{M}at_{(N_1,N_2,N_3)}f = B = \begin{pmatrix} -1 & 3/4 & 0 \\ 0 & -1 & 4/3 \\ 1 & -9/4 & 2 \end{pmatrix}}$$

12. On note, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_4[X]$: $u(P) = \displaystyle\sum_{i=1}^{3} P(i)N_i$.
    (a) • u est linéaire. En effet, $\forall P, Q \in \mathbb{R}_4[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} u(\lambda P + \mu Q) &= \sum_{i=1}^{3}(\lambda P + \mu Q)(i)N_i = \sum_{i=1}^{3}(\lambda P(i)N_i + \mu Q(i)N_i) \\ &= \lambda \sum_{i=1}^{3} P(i)N_i + \mu \sum_{i=1}^{3} Q(i)N_i \end{aligned}$$

    Il est clair par ailleurs que u est à valeurs dans $\mathbb{R}_4[X]$ car $N_1, N_2, N_3 \in \mathbb{R}_4[X]$.

$$\boxed{u \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_4[X].}$$

    (b) Soit $P \in \mathbb{R}_4[X]$ et $j \in \{1, 2, 3\}$:

$$\begin{aligned} \langle P - u(P), N_j \rangle &= \langle P - \sum_{i=1}^{3} P(i)N_i, N_j \rangle \\ &= \langle P, N_j \rangle - \sum_{i=1}^{3} P(i)\underbrace{(N_i \,|\, N_j)}_{=\delta_{i,j}} = \sum_{k=0}^{4} P(k)\underbrace{N_j(k)}_{=\delta_{j,k}} - P(j) \\ \langle P - u(P), N_j \rangle &= P(j) - P(j) = 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall P \in \mathbb{R}_4[X],\ \forall j \in \{1, 2, 3\},\ \ \langle P - u(P), N_j \rangle = 0}$$

    (c) La question précédente montre que $P - u(P)$ est orthogonal au sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(N_1, N_2, N_3) = E$. On a donc la décomposition :

$$\forall P \in \mathbb{R}_4[X], \quad P = \underbrace{u(P)}_{\in E} + \underbrace{(P - u(P))}_{\in E^\perp}$$

    Ce qui prouve que :

$$\boxed{u \text{ est la projection orthogonale sur } E.}$$

    (d) D'après la question précédente, le projeté orthogonal de $Q = X^2(X-2)(X-3)$ sur E est donné par la relation :

$$u(Q) = \sum_{i=1}^{3} Q(i)N_i = Q(1)N_1 = 2N_1$$

    Avec $N_1 = \dfrac{1}{M_1(1)} M_1 = -\dfrac{1}{6}X(X-2)(X-3)(X-4)$.

$$\boxed{u(Q) = -\frac{1}{6}X(X-2)(X-3)(X-4)}$$

Correction de l'exercice 2 ▲

Pour $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, on définit, lorsque c'est possible, l'application suivante :

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}[X], \quad (P \,|\, Q) = \int_0^1 \frac{P(x)Q(x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

1. Pour $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, le polynôme PQ est combinaison linéaire d'éléments X^k avec $k \in \mathbb{N}$. Il suffit donc de vérifier que l'intégrale :

$$\int_0^1 \frac{x^k}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^{k-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{x^{\frac{1}{2}-k}}\,\mathrm{d}x$$

   existe. C'est le cas car il s'agit d'une intégrale de référence $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ avec $\alpha = \dfrac{1}{2} - k < 1$. Ainsi, par combinaisons linéaires :

$$\boxed{\text{L'expression existe pour tous polynômes } P \text{ et } Q.}$$

2. L'application est clairement symétrique. De plus, pour $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $P_1, P_2, Q \in \mathbb{R}[X]$, on a :

$$\begin{aligned} (\lambda P_1 + \mu P_2 \,|\, Q) &= \int_0^1 \frac{(\lambda P_1 + \mu P_2)(x)Q(x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \left[\frac{\lambda P_1(x)Q(x)}{\sqrt{x}} + \frac{\mu P_2(x)Q(x)}{\sqrt{x}}\right]\mathrm{d}x \\ &= \lambda \int_0^1 \frac{P_1(x)Q(x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x + \mu \int_0^1 \frac{P_2(x)Q(x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \lambda(P_1 \,|\, Q) + \mu(P_2 \,|\, Q) \end{aligned}$$

L'application est linéaire à gauche, donc à droite par symétrie. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. L'application $x \mapsto \dfrac{P^2(x)}{\sqrt{x}}$ est continue et positive sur $]0,1]$ donc :

$$(P \,|\, P) = \int_0^1 \frac{P^2(x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \geqslant 0$$

et :

$$\begin{aligned} (P \,|\, P) = 0 &\implies \forall x \in]0,1], \quad \frac{P^2(x)}{\sqrt{x}} = 0. \\ &\implies \forall x \in]0,1], \quad P(x) = 0. \\ &\implies P = 0 \ \text{(car } P \text{ a une infinité de racines.)} \end{aligned}$$

Donc l'application est définie et positive. Au final :

$$\boxed{\text{L'application est un produit scalaire.}}$$

3. Soit $k \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^1 \frac{x^k}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^{k-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{k+\frac{1}{2}} x^{k+\frac{1}{2}}\right]_0^1 = \frac{1}{k+\frac{1}{2}}$$

. D'où :

$$\boxed{\int_0^1 \frac{x^k}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{2k+1}}$$

On a alors immédiatement, en remarquant que $(X^p \,|\, X^q) = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{p+q}}{\sqrt{x}}$:

$$\boxed{\forall p, q \in \mathbb{N}, \quad (X^p \,|\, X^q) = \frac{2}{2p+2q+1}}$$

4. On commence par déterminer une base orthogonale (Q_0, Q_1) avec :

$$Q_0 = 1 \quad \text{et} \quad Q_1 = X + \alpha Q_0$$

Nécessairement, on a :

$$(Q_0 \,|\, Q_1) = 0 = (Q_0 \,|\, X) + \alpha(Q_0 \,|\, Q_0)$$

D'où $\alpha = -\dfrac{(1 \,|\, X)}{(1 \,|\, 1)} = -\dfrac{2/3}{2} = -\dfrac{1}{3}$, et $Q_1 = X - \dfrac{1}{3}$. Il reste à normer cette base orthogonale avec $(Q_0 \,|\, Q_0) = 2$ et :

$$\begin{aligned} (Q_1 \,|\, Q_1) &= (Q_1 \,|\, X - \frac{1}{3}Q_0) = (Q_1 \,|\, X) \\ &= (X \,|\, X) - \frac{1}{3}(X \,|\, 1) = \frac{2}{5} - \frac{2}{9} = \frac{8}{45} \end{aligned}$$

Il reste à choisir $P_0 = \dfrac{Q_0}{\|Q_0\|} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $P_1 = \dfrac{Q_1}{\|Q_1\|} = \sqrt{\dfrac{45}{8}}\left(X - \dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{3\sqrt{10}}{4}\left(X - \dfrac{1}{3}\right)$.

$$\boxed{(P_0, P_1) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{10}}{4}X - \frac{\sqrt{10}}{4}\right) \text{ est une base orthonomée de } F = \mathrm{Vect}(1, X).}$$

5. On cherche la matrice de la projection orthogonale sur F dans la base $(1, X, X^2)$. Il est clair que $p(1) = 1$ et $p(X) = X$. Enfin :

$$\begin{aligned}
p(X^2) &= \frac{(X^2 \,|\, Q_0)}{(Q_0 \,|\, Q_0)} Q_0 + \frac{(X^2 \,|\, Q_1)}{(Q_1 \,|\, Q_1)} Q_1 \\
&= \frac{1}{2}(X^2 \,|\, 1) + \frac{45}{8}\left((X^2 \,|\, X) - \frac{1}{3}(X^2 \,|\, 1)\right)\left(X - \frac{1}{3}\right) \\
&= \frac{1}{5} + \frac{45}{8}\left(\frac{2}{7} - \frac{2}{15}\right)\left(X - \frac{1}{3}\right) \\
&= \frac{1}{5} + \frac{45}{8}\left(\frac{2}{7} - \frac{2}{15}\right) = \frac{1}{5} + \frac{45}{8} \times \frac{16}{105}\left(X - \frac{1}{3}\right) \\
p(X^2) &= \frac{1}{5} + \frac{6}{7}\left(X - \frac{1}{3}\right) = \frac{6}{7}X - \frac{3}{35}
\end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{\mathcal{M}at_{(1,X,X^2)}p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{35} \\ 0 & 1 & \frac{6}{7} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

6. Remarquons que :

$$I(a, b) = \int_0^1 \frac{(x^2 - ax - b)^2}{\sqrt{x}} = \|X^2 - (aX + b)\|^2$$

Il s'agit donc du carré de la distance, pour le produit scalaire considéré, de X^2 à $aX + b$. Le minimum de cette distance est atteint lorsque le polynôme $aX + b$ est le projeté orthogonal de X^2 sur F. On conclut d'après la question précédente :

$$\boxed{\text{L'intégrale : } I(a, b) = \int_0^1 \frac{(x^2 - ax - b)^2}{\sqrt{x}} \text{ est minimale pour } a = \frac{6}{7} \text{ et } b = -\frac{3}{35}.}$$

Correction de l'exercice 3 ▲

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}_1[X]$ constitué des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 1.
Autrement dit, $\mathbb{R}_1[X] = \{aX + b, \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.
On désigne par φ l'application de $\mathbb{R}_1[X] \times \mathbb{R}_1[X]$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}_1[X] \times \mathbb{R}_1[X], \quad \varphi(P, Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t.$$

Par exemple, si $P = X + 1$ et $Q = X$, alors $\varphi(X + 1, X) = \displaystyle\int_0^1 (t + 1)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$.

I. Vérifions que φ est bien un produit scalaire :
— φ est symétrique :

$$\varphi(P, Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 Q(t)P(t)\,\mathrm{d}t = \varphi(Q, P)$$

— φ est linéaire à gauche (donc bilinéaire par symétrie) :
$\forall P_1, P_2, Q \in \mathbb{R}_1[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda P_1 + \mu P_2, Q) &= \int_0^1 (\lambda P_1 + \mu P_2)(t)Q(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (\lambda P_1(t)Q(t) + \mu P_2(t)Q(t))\,\mathrm{d}t \\
&= \lambda \int_0^1 P_1(t)Q(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_0^1 P_2(t)Q(t)\,\mathrm{d}t = \lambda\varphi(P_1, Q) + \mu\varphi(P_2, Q)
\end{aligned}$$

— φ est définie :

$$\varphi(P, P) = \int_0^1 P^2(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$$

— φ est positive :

$$\begin{aligned}\varphi(P,P)=0 &\implies \int_0^1 P^2(t)\,\mathrm{d}t=0\\ &\implies \forall t\in[0,1],\ \ P^2(t)=0 \quad \text{car } t\mapsto P^2(t) \text{ est continue et positive sur } [0,1]\end{aligned}$$

Toutes les conditions sont vérifiées et en conclusion :

$$\boxed{\varphi \text{ définit un produit scalaire sur } R.}$$

On notera par la suite $(P\,|\,Q)=\varphi(P,Q)$. La norme associée à ce produit scalaire sera notée $\|.\|$.
Ainsi, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_1[X]$, $\|P\|=\sqrt{(P\,|\,P)}$.

II. Dans cette question, on se propose de montrer qu'il existe un unique polynôme P_0 de $\mathbb{R}_1[X]$ possédant la propriété suivante : $\forall P\in\mathbb{R}_1[X],\quad (P\,|\,P_0)=P(0)$.

II.A. Soit P_0 un polynôme fixé de $\mathbb{R}_1[X]$.

Si l'égalité $(P\,|\,P_0)=P(0)$ est vérifiée pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_1[X]$, alors en particulier elle est vérifiée pour les deux polynômes $P=1$ et $P=X$.

Réciproquement, si elle est vérifiée pour les deux polynômes $P=1$ et $P=X$, alors elle est vérifiée pour un polynôme quelconque $P=aX+b$. En effet :

$$(P\,|\,P_0)=(aX+b\,|\,P_0)=a(X\,|\,P_0)+b(1\,|\,P_0)=a\times 0+b\times 1=b=P(0)$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{L'égalité } (P\,|\,P_0)=P(0) \text{ est vérifiée pour tout polynôme } P \text{ de } \mathbb{R}_1[X], \text{ si et seulement si,}\\ \text{elle est vérifiée pour les deux polynômes } P=1 \text{ et } P=X.\end{array}}$$

II.B. On pose : $P_0(X)=a_0X+b_0$ où a_0 et b_0 désignent deux réels.

IIB.1 On calcule simplement :

$$\begin{aligned}(1\,|\,P_0) &= a(1\,|\,X)+b(1\,|\,1)=a\int_0^1 t\,\mathrm{d}t+b\int_0^1\mathrm{d}t\\ &= \frac{a}{2}+b\\ (X\,|\,P_0) &= a(X\,|\,X)+b(X\,|\,1)=a\int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t+b\int_0^1 t\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{a}{3}+\frac{b}{2}\end{aligned}$$

De plus, on sait, d'après la question précédente, que $(P\,|\,P_0)=P(0)$ pour tout polynôme de $\mathbb{R}_1[X]$, si et seulement si $(1\,|\,P_0)=1$ et $(X\,|\,P_0)=0$, autrement dit :

$$\boxed{\begin{array}{l}(P\,|\,P_0)=P(0) \text{ pour tout polynôme de } \mathbb{R}_1[X], \text{ si et seulement si :}\\ \qquad\qquad\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2}a_0+b_0=1\\ \frac{1}{3}a_0+\frac{1}{2}b_0=0\end{array}\right.\end{array}}$$

IIB.2 Il reste à résoudre ce système :

$$\begin{aligned}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2}a_0+b_0=1\\ \frac{1}{3}a_0+\frac{1}{2}b_0=0\end{array}\right. &\iff \left\{\begin{array}{ll}b_0=-\frac{2}{3}a_0 & (L_2)\\ \frac{1}{2}a_0+b_0=-\frac{1}{6}a_0=1 & (L_1)\end{array}\right.\\ &\iff a_0=-6 \text{ et } b_0=4\end{aligned}$$

En conclusion :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Il existe un unique polynôme } P_0=-6X+4 \text{ de } \mathbb{R}_1[X] \text{ tel que :}\\ \qquad\qquad \forall P\in\mathbb{R}_1[X],\quad (P\,|\,P_0)=P(0).\end{array}}$$

III. On désigne par S l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{R}_1[X]$ tels que $\|P\|=1$ et on se propose de déterminer la valeur maximale prise par $P(0)$ lorsque P décrit S en utilisant successivement deux méthodes différentes.

III.A **Première méthode.** On pose $P_1=1$.

IIIA.1 $(P_1\,|\,P_1) = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}t = 1$, donc :

$$\boxed{\|P_1\| = 1}$$

IIIA.2 On cherche Q_2 orthogonal à P_1 sous la forme $Q_2 = X + \alpha P_1$, avec :

$$0 = (Q_2\,|\,P_1) = (X\,|\,P_1) + \alpha(P_1\,|\,P_1)$$

D'où : $\alpha = -\dfrac{(X\,|\,P_1)}{(P_1\,|\,P_1)} = -(X\,|\,P_1) = -\displaystyle\int_0^1 t\,\mathrm{d}t = -\dfrac{1}{2}$.

On a ainsi $Q_2 = X - \dfrac{1}{2}$, et il reste à choisir $P_2 = \dfrac{Q_2}{\|Q_2\|}$ avec :

$$\|Q_2\|^2 = (Q_2\,|\,Q_2) = (Q_2\,|\,X - \frac{1}{2}P_1) = (Q_2\,|\,X) = \int_0^1 \left(t^2 - \frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

D'où $\|Q_2\| = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$, et on conclut :

$$\boxed{\text{Si } P_2 = 2\sqrt{3}X - \sqrt{3}, \text{ alors } (P_1, P_2) \text{ est une base orthonormale de } \mathbb{R}_1[X].}$$

IIIA.3 Soit $P \in \mathbb{R}_1[X]$. Alors on peut écrire : $P = \alpha P_1 + \beta P_2$.

$$\begin{array}{rcl} P \in S & \iff & (\alpha P_1 + \beta P_2\,|\,\alpha P_1 + \beta P_2) = 1 \\ & \iff & \alpha^2(P_1\,|\,P_1) + 2\alpha\beta(P_1\,|\,P_2) + \beta^2(P_2\,|\,P_2) = 1 \\ & \iff & \alpha^2 + \beta^2 = 1 \end{array}$$

On constate ainsi que $P \in S$ si et seulement si le couple (α, β) est sur le cercle unité de $\mathbb{R}^2$, donc si et seulement s'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\cos(\theta) = \alpha$ et $\sin(\theta) = \beta$.

$$\boxed{S = \left\{P = \cos(\theta)P_1 + \sin(\theta)P_2,\ \ \theta \in \mathbb{R}\right\}}$$

IIIA.4 On suppose $P = \cos(\theta)P_1 + \sin(\theta)P_2$:

$$\begin{array}{rcl} P(0) & = & \cos(\theta)P_1(0) + \sin(\theta)P_2(0) = \cos(\theta) - \sqrt{3}\sin(\theta) \\ & = & 2\left(\dfrac{1}{2}\cos(\theta) - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin(\theta)\right) \end{array}$$

Avec $\lambda = 2$ et $\theta_0 = -\dfrac{\pi}{3}$:

$$\begin{array}{rcl} P(0) & = & \lambda\big(\cos(\theta_0)\cos(\theta) + \sin(\theta_0)\sin(\theta)\big) \\ & = & \lambda\cos(\theta - \theta_0) \end{array}$$

$$\boxed{\text{On a } P(0) = \lambda\cos(\theta - \theta_0) \text{ pour tout réel } \theta, \text{ avec } \lambda = 2 \text{ et } \theta_0 = -\frac{\pi}{3}.}$$

IIIA.5 Il est clair, à partir de cette expression, que lorsque P décrit S, on a $P(0) \leqslant \lambda$ avec égalité si $\theta = \theta_0$. En conclusion :

$$\boxed{\text{La valeur maximale prise par } P(0) \text{ lorsque } P \text{ décrit } S \text{ est } \lambda = 2.}$$

III.B **Deuxième méthode.**

IIIB.1 Pour le produit scalaire considéré, l'inégalité de Cauchy-Schwarz est :

$$\boxed{\forall P, Q \in \mathbb{R}_1[X], \quad |(P\,|\,Q)| \leqslant \|P\|\|Q\|}$$

avec égalité si et seulement si les polynômes P et Q sont linéairement dépendants.

IIIB.2 En particulier, on a :

$$\forall P \in S, \quad (P\,|\,P_0) \leqslant |(P\,|\,P_0)| \leqslant \|P\|\|P_0\| = \|P_0\|.$$

et d'après le résultat obtenu dans la partie II, $(P\,|\,P_0) = P(0)$:

$$\boxed{\forall P \in S, \quad P(0) \leqslant \|P_0\|.}$$

IIIB.3 $\|P_0\|^2 = \int_0^1 (4-6t)^2\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (36t^2-48t+16)\,\mathrm{d}t = 12-24+16 = 4.$

Donc $\|P_0\| = 2$. De plus, l'égalité est réalisée pour P colinéaire à P_0. Pour que P soit dans S, il suffit donc de prendre :

$$P = \frac{P_0}{\|P_0\|} = -3X+2$$

Il existe donc un polynôme P de S tel que $P(0) = \|P_0\|$.

$$\boxed{\text{Si } P = -3X+2, \text{ alors } P(0) = \|P_0\|.}$$

IIIB.4 On vient de démontrer que la valeur maximale prise par $P(0)$ lorsque P décrit S était $\|P_0\|$. D'où :

$$\boxed{2 \text{ est la valeur maximale prise par } P(0) \text{ lorsque } P \text{ décrit } S.}$$

Correction de l'exercice 4 ▲

Étude d'une intégrale

1. Soit $A > 0$:

$$\int_0^A e^{-t}\,\mathrm{d}t = \Big[-e^{-t}\Big]_0^A = 1 - e^{-A} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

On en déduit que :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t \text{ converge et vaut } 1}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge.

(a) Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$. On effectue l'intégration par parties suivante :

$$\begin{array}{lcl} u(t) = t^{n+1} & \text{et} & v'(t) = e^{-t} \\ u'(t) = (n+1)t^n & & v(t) = -e^{-t} \end{array}$$

et on a immédiatement le résultat :

$$\boxed{\int_0^A t^{n+1}e^{-t}\,\mathrm{d}t = -A^{n+1}e^{-A} + (n+1)\int_0^A t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t.}$$

(b) On sait d'après les croissances comparées de fonction que pour $\alpha, \beta > 0$, on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{e^{\beta x}} = 0$, donc :

$$\boxed{\lim_{A\to+\infty} A^{n+1}e^{-A} = \lim_{A\to+\infty} \frac{A^{n+1}}{e^A} = 0}$$

(c) On sait de plus que I_n converge, d'où :

$$\lim_{A\to+\infty} (n+1)\int_0^A t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t = (n+1)I_n$$

D'après 2a et 2b, $\displaystyle\int_0^A t^{n+1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ a une limite finie lorsque A tend vers $+\infty$, ce qui prouve que I_{n+1} converge et que :

$$\boxed{I_{n+1} = (n+1)I_n}$$

3. Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $n!$:

⋆ C'est vrai pour $n = 0$ d'après la question 1.

⋆ Si la propriété est vraie au rang n alors, d'après la question 2, on sait que I_{n+1} converge, et aussi que :

$$I_{n+1} = (n+1)I_n = (n+1)\times n! = (n+1)!$$

La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

Par récurrence, on a montré le résultat suivant :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \ I_n \text{ converge et vaut } n!.}$$

Étude d'un produit scalaire

4. On sait qu'un produit de deux polynômes est un polynôme, donc PQ est un polynôme et $t \mapsto P(t)Q(t)e^{-t}$ est une combinaison linéaire de fonctions $t \mapsto t^n e^{-t}$. On a vu à la question 3 qu'une fonction de ce type est intégrable sur $[0, +\infty[$, donc $t \mapsto P(t)Q(t)e^{-t}$ est intégrable comme combinaison linéaire de fonctions intégrables :

$$\boxed{\forall P, Q \in \mathbb{R}_3[X], \text{ l'intégrale } \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

5. L'application $(P, Q) \mapsto \langle P, Q\rangle$ vérifie les points suivants :
   ⋆ Symétrique : clairement pour tout $P, Q \in \mathbb{R}_3[X]$, on a $\langle P, Q\rangle = \langle Q, P\rangle$.
   ⋆ Linéaire à gauche (donc bilinéaire). Soit $P_1, P_2, Q \in \mathbb{R}_3[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcl} \langle P_1 + \lambda P_2, Q\rangle & = & \displaystyle\int_0^{+\infty} (P_1(t) + \lambda P_2(t))Q(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t \\ & = & \displaystyle\int_0^{+\infty} P_1(t)Q(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t + \lambda \int_0^{+\infty} P_2(t)Q(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t = \langle P_1, Q\rangle + \lambda(P_2 \,|\, Q) \end{array}$$

   ⋆ Positive : $\forall P \in \mathbb{R}_3[X]$, on a $(P \,|\, P) = \displaystyle\int_0^{+\infty} P^2(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t \geqslant 0$.
   ⋆ Définie positive : $\forall P \in \mathbb{R}_3[X]$,

$$\begin{array}{rcl} (P \,|\, P) = 0 & \Longrightarrow & \displaystyle\int_0^{+\infty} P^2(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t = 0 \\ & \Longrightarrow & \forall t \geqslant 0,\ \ P^2(t)e^{-t} = 0 \text{ car l'intégrande est continue et positive.} \\ & \Longrightarrow & \forall t \geqslant 0,\ \ P^2(t) = 0 = P(t) \\ & \Longrightarrow & P = 0 \text{ car } P \text{ a une infinité de racines.} \end{array}$$

   En résumé :

$$\boxed{\text{L'application } \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] \times \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R} \\ (P, Q) & \mapsto & \langle P, Q\rangle \end{array} \text{ est un produit scalaire sur } \mathbb{R}_3[X].}$$

Construction d'une base orthogonale

Soit Φ l'application définie sur $\mathbb{R}_3[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_3[X],\ \ \Phi(P) = XP''(X) + (1 - X)P'(X).$$

On rappelle que la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ est la famille $\mathcal{B}_c = (1, X, X^2, X^3)$.

6. Soient $P, Q \in \mathbb{R}_3[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcl} \Phi(P + \lambda Q) & = & X(P''(X) + \lambda Q''(X)) + (1 - X)(P'(X) + \lambda Q'(X)) \\ & = & (XP''(X) + (1 - X)P'(X)) + \lambda(XQ''(X) + (1 - X)Q'(X)) = \Phi(P) + \lambda\Phi(Q) \end{array}$$

   Donc Φ est linéaire. De plus, si $P \in \mathbb{R}_3[X]$, alors $P' \in \mathbb{R}_2[X]$ et $P'' \in \mathbb{R}_1[X]$, donc $(1 - X)P'(X) \in \mathbb{R}_3[X]$ et $XP''(X) \in \mathbb{R}_2[X]$. Ainsi $\Phi(P) \in \mathbb{R}_3[X]$.

$$\boxed{\Phi \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_3[X].}$$

7. On a $\Phi(1) = 0$, $\Phi(X) = 1-X$, $\Phi(X^2) = 2X+2X(1-X) = 4X-2X^2$ et $\Phi(X^3) = 6X^2+3X^2(1-X) = 9X^2-3X^3$. La matrice de Φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ est :

$$\boxed{A = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}_c}(\Phi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}}$$

8. La matrice de Φ étant triangulaire supérieure, on a : $\chi_\Phi(x) = x(x+1)(x+2)(x+3)$, d'où :

$$\boxed{\mathrm{Sp}(\Phi) = \{0, -1, -2, -3\}}$$

Le polynôme caractéristique de Φ est scindé à racines simples, donc :

$$\boxed{\text{L'endomorphisme } \Phi \text{ est diagonalisable.}}$$

9. On cherche les sous espaces propres de Φ par la résolutions des systèmes suivants :

$$\begin{aligned}
A\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\end{pmatrix} &\iff \left\{\begin{array}{rcl} y &=& 0\\ -y+4z &=& 0\\ -2z+9t &=& 0\\ -3t &=& 0\end{array}\right.\\
&\iff y = z = t = 0\\
(A+I)\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\end{pmatrix} &\iff \left\{\begin{array}{rcl} x+y &=& 0\\ 4z &=& 0\\ -z+9t &=& 0\\ -2t &=& 0\end{array}\right.\\
&\iff y = -x \text{ et } z = t = 0.\\
(A+2I)\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\end{pmatrix} &\iff \left\{\begin{array}{rcl} 2x+y &=& 0\\ y+4z &=& 0\\ 9t &=& 0\\ -t &=& 0\end{array}\right.\\
&\iff y = -2x,\ \ z = -y/4 = x/2 \text{ et } t = 0.\\
(A+3I)\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\end{pmatrix} &\iff \left\{\begin{array}{rcl} 3x+y &=& 0\\ 2y+4z &=& 0\\ z+9t &=& 0\end{array}\right.\\
&\iff y = -3x,\ \ z = -y/2 = 3x/2 \text{ et } t = -z/9 = -x/6.
\end{aligned}$$

Donc E_0 : Vect $\begin{pmatrix} 1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$, E_{-1} : Vect $\begin{pmatrix} 1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$, E_{-2} : Vect $\begin{pmatrix} 1\\-2\\1/2\\0\end{pmatrix}$, E_{-3} : Vect $\begin{pmatrix} 1\\-3\\3/2\\-1/6\end{pmatrix}$. En se rapportant à la base canonique, on conclut :

$$\boxed{P_0 = 1\ ;\ \ P_1 = X-1\ ;\ \ P_2 = X^2 - 4X + 2\ ;\ \ P_3 = X^3 - 9X^2 + 18X - 6}$$

10. Soient P et Q dans $\mathbb{R}_3[X]$.
   (a) On pose $f : t \mapsto tP'(t)e^{-t}$. f est un produit de 3 fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$, donc :

   $$\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0, +\infty[.}$$

   Soit $t \geqslant 0$, on a $f'(t) = P'(t)e^{-t} + tP''(t)e^{-t} - tP'(t)e^{-t} = \big(tP''(t) + (1-t)P'(t)\big)e^{-t}$.

   $$\boxed{f'(t) = \Phi(P)(t)e^{-t}}$$

   (b) D'après la question précédente : $\langle \Phi(P), Q\rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} \Phi(P)(t)Q(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f'(t)e^{t}Q(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

   $$\boxed{\langle \Phi(P), Q\rangle = \int_0^{+\infty} f'(t)Q(t)\,\mathrm{d}t.}$$

   (c) On effectue l'intégration par parties suivante : $\begin{array}{lcl} u(t) = Q(t) & \text{et} & v'(t) = f'(t)\\ u'(t) = Q'(t) & & v(t) = f(t)\end{array}$

   $$\begin{aligned}
   \int_0^A f'(t)Q(t)\,\mathrm{d}t &= \Big[f(t)Q(t)\Big]_0^A - \int_0^A f(t)Q'(t)\,\mathrm{d}t\\
   &= AP'(A)e^{-A} - \int_0^A tP'(t)e^{-t}Q'(t)\,\mathrm{d}t
   \end{aligned}$$

Par le théorème des croissances comparées, on a $\lim_{A\to+\infty} AP'(A)e^{-A} = 0$. En passant à la limite lorsque $A \to +\infty$, on a :

$$\boxed{\langle \Phi(P), Q\rangle = -\int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t.}$$

(d) De la même manière, par permutation de P et Q, on a :

$$\langle P, \Phi(Q)\rangle = \langle \Phi(Q), P\rangle = -\int_0^{+\infty} tQ'(t)P'(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t = \langle \Phi(P), Q\rangle$$

$$\boxed{\langle \Phi(P), Q\rangle = \langle P, \Phi(Q)\rangle.}$$

11. Soient i et j dans $\{0,1,2,3\}$ tels que $i \neq j$. On sait que $\langle \Phi(P_i), P_j\rangle = \langle P_i, \Phi(P_j)\rangle$, or :

$$\langle \Phi(P_i), P_j\rangle = \langle -iP_i, P_j\rangle = -i\langle P_i, P_j\rangle \quad \text{et} \quad \langle P_i, \Phi(P_j)\rangle = \langle P_i, -jP_j\rangle = -j\langle P_i, P_j\rangle$$

D'où $-i\langle P_i, P_j\rangle = -j\langle P_i, P_j\rangle$, ou encore :

$$\boxed{(i-j)\langle P_i, P_j\rangle = 0}$$

Comme $i - j \neq 0$, on a $\langle P_i, P_j\rangle = 0$, ce qui signifie que :

$$\boxed{\text{Pour } i \neq j,\ P_i \text{ et } P_j \text{ sont orthogonaux.}}$$

12. La famille (P_0, P_1, P_2, P_3) est une famille orthogonale constituée de vecteurs non nuls, ce qui prouve qu'elle est libre. De plus elle comporte un nombre de vecteurs égale à la dimension de $\mathbb{R}_3[X]$, donc il s'agit d'une base de $\mathbb{R}_3[X]$:

$$\boxed{(P_0, P_1, P_2, P_3) \text{ est une base de } \mathbb{R}_3[X] \text{ constituée de vecteurs 2 à 2 orthogonaux.}}$$

Correction de l'exercice 5 ▲

On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n, où n est un entier naturel.

I. Étude d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$

1) Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
f(\lambda P + \mu Q) &= (2X-1)(\lambda P + \mu Q)' + (X^2 - X - 2)(\lambda P + \mu Q)'' \\
&= (2X-1)(\lambda P' + \mu Q') + (X^2 - X - 2)(\lambda P'' + \mu Q'') \\
&= \lambda\big((2X-1)P' + (X^2-X-2)P''\big) + \mu\big((2X-1)Q' + (X^2-X-2)Q''\big) \\
f(\lambda P + \mu Q) &= \lambda f(P) + \mu f(Q)
\end{aligned}$$

$$\boxed{f \text{ est une application linéaire de } \mathbb{R}[X].}$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$, et $P \in \mathbb{R}_n[X]$:
- $P' \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, donc $(2X-1)P' \in \mathbb{R}_n[X]$.
- $P'' \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$, donc $(X^2 - X - 2)P'' \in \mathbb{R}_n[X]$.

Par sommation, on a également $f(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.

$$\boxed{\text{La restriction } f_n \text{ de } f \text{ à } \mathbb{R}_n[X] \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X].}$$

3) On a $f(1) = 0$, $f(X) = 2X - 1$, et pour $k \geqslant 2$:

$$\begin{aligned}
f(X^k) &= (2X-1)kX^{k-1} + (X^2 - X - 2)k(k-1)X^{k-2} \\
&= k(k+1)X^k - k^2X^{k-1} - 2k(k-1)X^{k-2}
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\boxed{M_n = \begin{pmatrix}
0 & -1 & -4 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 2 & -4 & \ddots & & \vdots \\
\vdots & 0 & 6 & \ddots & & 0 \\
 & \vdots & & \ddots & & -2n(n-1) \\
 & & & & & -n^2 \\
0 & 0 & \cdots & & 0 & n(n+1)
\end{pmatrix}}$$

4) La matrice M_n est triangulaire supérieure donc les valeurs propres sont situées sur la diagonale :

$$\boxed{\mathrm{Spec}(f_n) = \{0, 2, 6, \ldots, n(n+1)\}}$$

f_n a $n+1$ valeurs propres distinctes en dimension $n+1$, donc :

$$\boxed{f_n \text{ est diagonalisable.}}$$

5) On sait que 0 est valeur propre simple de f_n, donc le noyau de f_n est de dimension 1. De plus $1 \in \mathrm{Ker}\, f_n$ donc $\mathrm{Ker}\, f_n = \mathrm{Vect}\{1\}$. Enfin par le théorème du rang :

$$\mathrm{rg}\, f_n = \dim \mathbb{R}_n[X] - \dim \mathrm{Ker}\, f_n = n$$

$$\boxed{\mathrm{Ker}\, f_n = \mathbb{R} \text{ et } \mathrm{rg}\, f_n = n}$$

6) On suppose que $n \geqslant 2$. On note $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de f_n rangées par ordre croissant : $\lambda_0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$. D'après les questions précédentes, on a :

$$\boxed{\forall k \in [\![0, n]\!]\,, \quad \lambda_k = k(k+1)}$$

Soit un polynôme P de degré q vecteur propre de f_n associé à la valeur propre λ_k. On note (en supposant P unitaire pour simplifier les notations) :

$$P = X^q + Q \quad \text{avec } \deg Q \leqslant q - 1$$

Alors, par linéarité de f :

$$f(P) = f(X^q) + f(Q)$$

$f(Q)$ est de degré $\leqslant q-1$, donc le monôme de plus haut degré de $f(P)$ est celui de $f(X^q)$, c'est à dire $q(q-1)X^q$. D'autre part :

$$f(P) = k(k+1)P = k(k+1)X^q + \cdots = q(q-1)X^q + \cdots$$

Nécessairement, il vient $k(k+1) = q(q+1)$, puis $k = q$. Il est par suite prouvé que :

$$\boxed{\text{P est de degré } k.}$$

7) Prenons une base de vecteurs propres $(P_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ de polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que P_k est unitaire et associé à la valeur propre λ_k. D'après la question qui précède, P_k est un polynôme de degré k.

On a donc prouvé l'existence d'une telle famille. Il reste à en prouver l'unicité :

Soient $(P_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ et $(Q_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ deux familles de polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$, telle que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, P_k et Q_k soient des polynômes unitaires de degré k, et vecteurs propres de f. Nécessairement, ils sont associés à la même valeur propre λ_k, et :

$$f(P_k - Q_k) = f(P_k) - f(Q_k) = \lambda_k(P_k - Q_k)$$

Si $P_k - Q_k \neq 0$, alors $P_k - Q_k$ est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ_k, ce qui est impossible car $P_k - Q_k \in \mathbb{R}_{k-1}[X]$, les deux polynômes étant unitaires. D'où :

$$P_k - Q_k = 0, \text{ et } P_k = Q_k$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Il existe une unique famille } (P_k)_{0 \leqslant k \leqslant n} \text{ de polynômes de } \mathbb{R}_n[X]\text{, telle que, pour tout } k \in [\![0, n]\!],\ P_k \text{ soit} \\ \text{un polynôme unitaire de degré } k \text{ et un vecteur propre de } f.\end{array}}$$

8) Étude d'un cas particulier

Dans cette question, on suppose $n = 3$. Il suffit d'appliquer ce qu'on a établi dans le cas général au cas particulier :

$$M_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & -12 \\ 0 & 0 & 6 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \mathrm{Spec}(M_3) = \{0, 2, 6, 12\}$$

Donner la matrice M_3 de f_3 dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$, le spectre de f_3 et déterminer les polynômes P_0, P_1, P_2 et P_3.

Par ailleurs, il est évident que

$$\boxed{P_0 = 1}$$

et on détermine $P_1 = a + bX$ de la manière qui suit :

$$(M_3 - 2I)\begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff -2a - b = 0, \text{ i.e. } a = -b/2$$

$$\boxed{P_1 = X - \frac{1}{2}}$$

De même, on cherche $P_2 = a + bX + cX^2$ avec :

$$(M_3 - 6I)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{rcl} -6a - b - 4c & = & 0 \\ -4b - 4c & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff b = -c \text{ et } a = -c/2$$

$$\boxed{P_2 = X^2 - X - \frac{1}{2}}$$

Enfin $P_3 = a + bX + cX^2 + dX^3$ avec :

$$(M_3 - 12I)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{rcl} -12a - b - 4c & = & 0 \\ -10b - 4c - 12d & = & 0 \\ -6c - 9d & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff c = -\frac{3}{2}d,\ b = -\frac{3}{5}d \text{ et } a = \frac{11}{20}d$$

$$\boxed{P_3 = X^3 - \frac{3}{2}X^2 - \frac{3}{5}X + \frac{11}{20}}$$

II. Étude d'un produit scalaire de $\mathbb{R}_n[X]$

On définit l'application φ par :

$$\forall (P, Q) \in \big(\mathbb{R}[X]\big)^2, \quad \varphi(P, Q) = \int_{-1}^{2} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t.$$

De façon usuelle, on confond un polynôme formel P et sa fonction polynomiale associée $t \mapsto P(t)$.

1) La bilinéarité, la symétrie, et la positivité de φ sont claires. Enfin :

$$\begin{aligned} \varphi(P, P) = 0 \quad &\Longrightarrow \quad \int_{-1}^{2} P^2(t)\,\mathrm{d}t = 0 \\ &\Longrightarrow \quad \forall t \in [-1, 2],\ \ P^2(t) = 0, \text{ car } t \mapsto P^2(t) \text{ est continue et positive.} \\ &\Longrightarrow \quad P = 0, \text{ car } P \text{ a une infinité de racines.} \end{aligned}$$

En conclusion :

$$\boxed{\varphi \text{ définit un produit scalaire sur } \mathbb{R}[X].}$$

On note désormais $\varphi(P, Q) = \langle P, Q \rangle$ le produit scalaire de deux polynômes P et Q de $\mathbb{R}[X]$.

2) a) Soit $(P, Q) \in \big(\mathbb{R}[X]\big)^2$:

$$\begin{aligned} \langle f(P), Q \rangle \quad &= \quad \int_{-1}^{2} \big((2t-1)P'(t) + (t^2 - t - 2)P''(t)\big)Q(t) \\ &= \quad \int_{-1}^{2} (2t-1)P'(t)Q(t) + \int_{-1}^{2} (t^2 - t - 2)P''(t)Q(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

On fait une intégration par parties dans la seconde intégrale :

$$\begin{array}{lcl} u(t) = (t^2 - t - 2)Q(t) & \text{et} & v'(t) = P''(t) \\ u'(t) = (2t-1)Q(t) + (t^2 - t - 2)Q'(t) & & v(t) = P'(t) \end{array}$$

$$\begin{aligned}\langle f(P), Q\rangle &= \int_{-1}^{2}(2t-1)P'(t)Q(t) + \left[(t^2-t-2)Q(t)P'(t)\right]_1^2\\ &\quad - \int_{-1}^{2}\big((2t-1)Q(t)+(t^2-t-2)Q'(t)\big)P'(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Après simplification, on obtient le résultat :

$$\boxed{\forall (P,Q)\in \big(\mathbb{R}[X]\big)^2,\quad \langle f(P), Q\rangle = -\int_{-1}^{2}(t^2-t-2)P'(t)Q'(t)\,\mathrm{d}t.}$$

b) Dans la dernière expression trouvée, on constate qu'on peut permuter P et Q sans changer la valeur de celle-ci, ainsi :

$$\boxed{\forall (P,Q)\in \big(\mathbb{R}[X]\big)^2,\quad \langle f(P), Q\rangle = \langle P, f(Q)\rangle.}$$

c) Soit $n\in\mathbb{N}^*$, on considère la famille de polynômes $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ définie en I.7).

Soient $k,l\in [\![0,n]\!]$ avec $k\neq l$:

$$\langle f(P_k), P_l\rangle = \langle P_k, f(P_l)\rangle$$

ce qui donne :

$$\lambda_k\langle P_k, P_l\rangle = \lambda_l\langle P_k, P_l\rangle$$

Puis, comme $\lambda_k\neq\lambda_l$: $\langle P_k, P_l\rangle = 0$. En conclusion

$$\boxed{(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n} \text{ est une famille orthogonale pour le produit scalaire } \langle .,.\rangle.}$$

3) (a) Soit $k\in\mathbb{N}^*$, et $Q\in\mathbb{R}_{k-1}[X]$.

$(P_0,P_1,\dots,P_{k-1})$ est une famille étagée de k polynômes de $\mathbb{R}_{k-1}[X]$, donc forme une base de cet espace, ainsi :

$$\exists \lambda_0,\lambda_1,\dots,\lambda_{k-1}\quad \text{tels que } Q=\lambda_0P_0+\lambda_1P_1+\cdots+\lambda_{k-1}P_{k-1}$$

Il reste à faire le calcul :

$$\langle P_k, Q\rangle = \lambda_0\underbrace{\langle P_0,Q\rangle}_{=0}+\lambda_1\underbrace{\langle P_1,Q\rangle}_{=0}+\cdots+\lambda_{k-1}\underbrace{\langle P_{k-1},Q\rangle}_{=0}=0$$

$$\boxed{P_k\in\big(\mathbb{R}_{k-1}[X]\big)^{\perp}}$$

(b) On note $p(X^2)$ le projeté orthogonal de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$. On sait que :

$$p(X^2) = \frac{\langle X^2,P_0\rangle}{\langle P_0,P_0\rangle}P_0+\frac{\langle X^2,P_1\rangle}{\langle P_1,P_1\rangle}P_1$$

Avec :

$$\begin{aligned}\langle X^2,P_0\rangle &= \int_{-1}^{2}t^2\,\mathrm{d}t=\left[\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{2}=3\\ \langle X^2,P_1\rangle &= \int_{-1}^{2}\left(t^3-\frac{t^2}{2}\right)\mathrm{d}t=\left[\frac{t^4}{4}-\frac{t^3}{6}\right]_{-1}^{2}=4-\frac{4}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}=\frac{9}{4}\\ \langle P_0,P_0\rangle &= \int_{-1}^{2}\mathrm{d}t=3\\ \langle P_1,P_1\rangle &= \int_{-1}^{2}\left(t^2-t+\frac{1}{4}\right)\mathrm{d}t=3+\left[-\frac{t^2}{2}+\frac{t}{4}\right]_{-1}^{2}=3-\frac{3}{2}+\frac{3}{4}=\frac{9}{4}\end{aligned}$$

$$p(X^2) = P_0+P_1=1+\big(X-\frac{1}{2}\big)$$

$$\boxed{p(X^2)=X+\frac{1}{2}}$$

Autre méthode (non suggérée par l'énoncé) : Poser $p(X^2)=aX+b$, en remarquant que $X^2-p(X^2)$ est orthogonal à $\mathbb{R}_1[X]$, donc à 1 et X.

Correction de l'exercice 6 ▲

Partie I : un exemple numérique

1. Si B_i a pour coordonnées (x_i, y_i), alors le point H_i a pour coordonnées $(x_i, mx_i + p)$, et donc le vecteur $\overrightarrow{H_iB_i}$ a pour composantes $(0, y_i - mx_i - p)$, d'où :

$$\boxed{\forall i \in \{1,2,3\},\ \ (B_iH_i)^2 = \|\overrightarrow{H_iB_i}\|^2 = (y_i - mx_i - p)^2}$$

2. Avec ce calcul, on peut déterminer :

$$\begin{aligned} \delta(m,p) &= \sum_{i=1}^{3}(B_iH_i)^2 = \sum_{i=1}^{3}(y_i - mx_i - p)^2 \\ &= (1+m-p)^2 + (-1-m-p)^2 + (1-2m-p)^2 \\ \delta(m,p) &= 1 + m^2 + p^2 + 2m - 2p - 2mp + 1 + m^2 + p^2 + 2m + 2p + 2mp + 1 + 4m^2 \\ & +p^2 - 4m - 2p + 4mp \end{aligned}$$

Après regroupement des termes et simplification, on trouve :

$$\boxed{\delta(m,p) = 6m^2 + 3p^2 + 4mp - 2p + 3}$$

3. Avec les notations de l'énoncé, on a :

$$q(m,p) = 6m^2 + 3p^2 + 4mp = \begin{pmatrix} m & p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m \\ p \end{pmatrix}$$

$$\boxed{q(m,p) = {}^tUSU}$$

4. Calculons le polynôme caractéristique de S pour avoir les valeurs propres λ et μ :

$$P_S = \begin{vmatrix} 6-X & 2 \\ 2 & 3-X \end{vmatrix} = X^2 - 9X + 14$$

$\Delta = 9^2 - 4 \times 14 = 25$, d'où $\lambda = (9-5)/2 = 2$ et $\mu = (9+5)/2 = 7$.

$$\boxed{\text{Les valeurs propres de } S \text{ sont } \lambda = 2 \text{ et } \mu = 7.}$$

5. On vérifie immédiatement que :

$$\boxed{\lambda + \mu = 9 = \mathrm{tr}(S) \quad \text{et} \quad \lambda \times \mu = 14 = \det(S)}$$

6. La matrice S est symétrique réelle donc, d'après le théorème spectral :

$$\boxed{\text{Il existe une matrice } P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ orthogonale telle que } S = P\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}{}^tP.}$$

7. On pose $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = {}^tP\begin{pmatrix} m \\ p \end{pmatrix} = {}^tPU$. Alors :

$$q(m,p) = {}^tUSU = {}^tUP\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}{}^tPU = {}^t\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

ce qui s'exprime plus simplement :

$$\boxed{q(m,p) = 2X^2 + 7Y^2}$$

8. Cherchons les deux sous-espaces propres de S :

$\star$ $(S-2I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{rcl} 4x+2y &=& 0 \\ 2x+y &=& 0 \end{array}\right. \iff y = -2x.$

$$\boxed{E_2 = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}}$$

$\star$ $(S-7I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -x+2y &= 0 \\ 2x-4y &= 0 \end{cases} \iff x = 2y.$

$$\boxed{E_7 = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}}$$

9. On rappelle (c'est un résultat du cours) que les deux sous-espaces propres sont orthogonaux. On choisit un vecteur unitaire de chacun d'entre eux pour obtenir les colonnes d'une matrice de passage orthogonale :

$$\boxed{S = P\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} {}^tP, \quad \text{avec} \quad P = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}$$

10. Par un simple calcul matriciel, en inversant la relation de la question 7 :

$$\begin{pmatrix} m \\ p \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}}(X+2Y) \\ \frac{1}{\sqrt{5}}(-2X+Y) \end{pmatrix}$$

On a donc les relations :

$$\boxed{\begin{cases} m &= \frac{1}{\sqrt{5}}(X+2Y) \\ p &= \frac{1}{\sqrt{5}}(-2X+Y) \end{cases}}$$

11. Puis, avec le résultat de la question 2 et celui de la question 7 :

$$\delta(m,p) = q(m,p) - 2p + 3 = 2X^2 + 7Y^2 - \frac{2}{\sqrt{5}}(-2X+Y) + 3$$

Regroupons les termes de cette expression de façon à faire apparaître des carrés :

$$\begin{aligned} \delta(m,p) &= 2\left(X^2 + \frac{2}{\sqrt{5}}X\right) + 7\left(Y^2 - \frac{2}{7\sqrt{5}}Y\right) + 3 \\ &= 2\left[\left(X + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{1}{5}\right] + 7\left[\left(Y - \frac{1}{7\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{1}{7^2 \times 5}\right] + 3 \end{aligned}$$

Après simplification :

$$\boxed{\delta(m,p) = 2\left(X + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + 7\left(Y - \frac{1}{7\sqrt{5}}\right)^2 + \frac{18}{7}}$$

12. On a clairement $\delta(m,p) \geqslant \frac{18}{7}$, et cette valeur est atteinte pour $X = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ et $Y = \frac{1}{7\sqrt{5}}$:

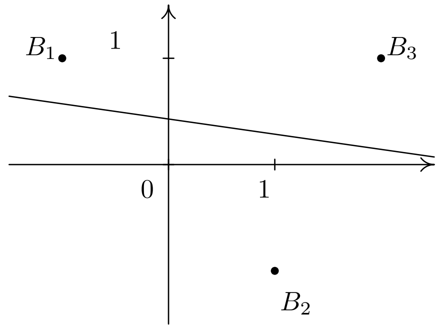
$$\boxed{\text{La fonction } \delta \text{ admet un minimum égal à } \frac{18}{7}.}$$

13. On a vu que le minimum de cette fonction est atteint pour $X_0 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ et $Y_0 = \frac{1}{7\sqrt{5}}$, ce qui correspond à :

$$\begin{cases} m_0 &= \frac{1}{\sqrt{5}}(X_0+2Y_0) = \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{-5}{7\times\sqrt{5}} = -\frac{1}{7} \\ p_0 &= \frac{1}{\sqrt{5}}(-2X_0+Y_0) = \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{15}{7\times\sqrt{5}} = \frac{3}{7} \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Le minimum de la fonction } \delta \text{ est atteint au point } (m_0,p_0) = \left(-\frac{1}{7}, \frac{3}{7}\right).}$$

14. La droite de régression linéaire correspondante est représentée ci-dessous :



Partie II : distance en dimension 3

1. (a) On sait déjà que $\mathrm{Im}\, f$ est engendré par les vecteurs colonnes C_1 et C_2 de la matrice A. Ces deux vecteurs forment par ailleurs clairement une famille libre. Il s'ensuit que :

$$\boxed{\mathcal{B} = (C_1, C_2) \text{ est une base de } \mathrm{Im}\, f \text{ et } \mathrm{rg}\, f = \dim(\mathrm{Im}\, f) = 2.}$$

D'après le théorème du rang : $\dim(\mathrm{Ker}\, f) = \dim \mathbb{R}^2 - \dim(\mathrm{Im}\, f) = 2 - 2 = 0$.

$$\boxed{\dim(\mathrm{Ker}\, f) = 0}$$

(b) On sait que le plan $\mathrm{Im}\, f$ a une équation cartésienne de la forme $ax+by+cz = 0$. Par ailleurs, les coordonnées de C_1 et C_2 doivent vérifier l'équation de ce plan, d'où le système :

$$\left\{\begin{array}{rcll} -a+b+2c & = & 0 & (1) \\ a+b+c & = & 0 & (2) \end{array}\right. \quad \text{i.e.} \quad \left\{\begin{array}{rcll} 2b+3c & = & 0 & (1)+(2) \\ b & = & -\dfrac{3}{2}c & \\ a & = & b+2c = \dfrac{1}{2}c & (1) \end{array}\right.$$

Donc, avec le choix $c = 2$:

$$\boxed{\mathrm{Im}\, f \text{ a pour équation cartésienne } x - 3y + 2z = 0.}$$

(on pouvait aussi faire le produit vectoriel de C_1 et C_2 pour avoir un vecteur normal au plan).

(c) $\dim(\mathrm{Im}\, f) = 2 \neq \dim \mathbb{R}^3$. On en déduit que :

$$\boxed{f \text{ n'est pas surjective, donc } f \text{ n'est pas bijective.}}$$

$\dim(\mathrm{Ker}\, f) = 0$, donc $\mathrm{Ker}\, f = \{0\}$. On en déduit que :

$$\boxed{f \text{ est injective.}}$$

(d) Commençons par déterminer une base orthogonale (c'_1, c'_2) à partir de la base $\mathcal{B}$ par la méthode de Schmidt :

⋆ On choisit $c'_1 = C_1$ puis $c'_2 = C_2 + \alpha c'_1$, avec :

$$(c'_1 \,|\, c'_2) = 0 = (C_2 \,|\, c'_1) + \alpha (c'_1 \,|\, c'_1) \ \text{ d'où : } \ \alpha = -\frac{(C_2 \,|\, c'_1)}{(c'_1 \,|\, c'_1)} = -\frac{(C_2 \,|\, C_1)}{(C_1 \,|\, C_1)}$$

On calcule ainsi $\alpha = -\dfrac{2}{6} = -\dfrac{1}{3}$, puis $c'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

⋆ Il suffit ensuite de normer les vecteurs trouvés :

$$C'_1 = \frac{c'_1}{\|c'_1\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C'_2 = \frac{c'_2}{\|c'_2\|} = \frac{1}{\sqrt{21}}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\mathcal{B}' = (C'_1, C'_2) = \left\{\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{21}}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}}$$

2. (a) Les composantes des vecteurs $\vec{u}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{70}}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ vérifient l'équation cartésienne de $\mathrm{Im}\, f$: $x - 3y + 2z = 0$.

De plus, la famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ est clairement libre donc, comme $\dim(\mathrm{Im}\, f) = 2$:

$$\boxed{\text{La famille } \mathcal{B}'' = (\vec{u}_1, \vec{u}_2) \text{ est une base de } \operatorname{Im} f.}$$

Enfin, on calcule :

$$\|\vec{u}_1\| = \frac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{(-2)^2+1^2} = 1 \; ; \; \|\vec{u}_2\| = \frac{1}{\sqrt{70}}\sqrt{3^2+5^2+6^2} = 1$$

$$(\vec{u}_1 \,|\, \vec{u}_2) = \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{1}{\sqrt{70}} \times (-2\times 3 + 1 \times 6) = 0$$

$$\boxed{\text{La base } \mathcal{B}'' \text{ est orthonormée.}}$$

(b) D'après la formule de projection :

$$\begin{aligned}
Z_0 &= (Y_0 \,|\, \vec{u}_1).\vec{u}_1 + (Y_0 \,|\, \vec{u}_2).\vec{u}_2 \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(-2+1\Big) \times \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{70}}\Big(3+5\times(-1)+6\Big) \times \frac{1}{\sqrt{70}} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \\
Z_0 &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{2}{35}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{35}\begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

En simplifiant, on conclut :

$$\boxed{\text{Le projeté orthogonal du vecteur } Y_0 \text{ sur } \operatorname{Im} f \text{ est } Z_0 = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.}$$

(c) On détermine un antécédent $X_0 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ de Z_0 par f en cherchant les solutions de l'équation :

$$AX_0 = Z_0 \quad \text{i.e.} \quad \left\{\begin{array}{rcl} -\alpha+\beta &=& 4/7 \\ \alpha+\beta &=& 2/7 \\ 2\alpha+\beta &=& 1/7 \end{array}\right.$$

ce qui se résout par la méthode du pivot :

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\alpha+\beta &=& 4/7 & \\ \beta &=& 3/7 & \quad \big(L_1+L_2\big)/2 \\ \beta &=& 3/7 & \quad \big(L_3+2L_1\big)/3 \end{array}\right.$$

On trouve ainsi une unique solution $\alpha = -1/7$ et $\beta = 3/7$:

$$\boxed{X_0 = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ est l'unique antécédent du vecteur } Z_0 \text{ par } f.}$$

3. (a) Soient $(m,p) \in \mathbb{R}^2$ et $X = \begin{pmatrix} m \\ p \end{pmatrix}$:

$$AX - Y_0 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m \\ p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{AX - Y_0 = \begin{pmatrix} -m+p-1 \\ m+p+1 \\ 2m+p-1 \end{pmatrix}}$$

Par passage à la norme élevée au carré, on trouve :

$$\begin{aligned}
\|AX - Y_0\|^2 &= (-m+p-1)^2 + (m+p+1)^2 + (2m+p-1)^2 \\
&= m^2+p^2+1-2mp+2m-2p+m^2+p^2+1+2mp+2m+2p+4m^2 \\
&\quad +p^2+1+4mp-4m-2p \\
\|AX - Y_0\|^2 &= 6m^2+3p^2+4mp-2p+3
\end{aligned}$$

Compte-tenu du résultat de la question I.2, on a bien la relation :

$$\boxed{\delta(m,p) = \|AX - Y_0\|^2}$$

Remarque : ce résultat n'est guère étonnant. C'est la méthode expliquée et développée dans le TD no 2 d'informatique !

(b) L'ensemble $\left\{AX,\ \ X \in \mathbb{R}^2\right\}$ n'est autre que $\operatorname{Im} f$. D'où :

$$\inf\left\{\delta(m,p)\,/\,(m,p) \in \mathbb{R}^2\right\} = \inf\left\{\|AX - Y_0\|^2\,/\,X \in \mathbb{R}^2\right\} = d(Y_0, \operatorname{Im} f)^2$$

Ce minimum est atteint lorsque AX est le projeté orthogonal de Y_0 sur $\operatorname{Im} f$, c'est à dire :

$$\boxed{\inf\left\{\delta(m,p)\,/\,(m,p) \in \mathbb{R}^2\right\} = d(Y_0, Z_0)^2}$$

(c) D'après la question 2c, on a $Z_0 = f(X_0)$ avec $X_0 = \begin{pmatrix} -1/7 \\ 3/7 \end{pmatrix}$, donc le minimum est atteint pour $m = -1/7$ et $p = 3/7$. Autrement dit :

$$\boxed{\text{La droite de régression linéaire est } \mathcal{D} : y = -\frac{x}{7} + \frac{3}{7}.}$$

Correction de l'exercice 7 ▲

1. Remarquons que pour tout $i \in [\![1,3]\!]$, on peut calculer les composantes des vecteurs suivants :

$$\overrightarrow{M_iH_i} :\ \ (x_i - x_i, y_i - (mx_i + p)) = (0, y_i - mx_i - p)$$

Le calcul suivant est alors immédiat :

$$\boxed{\delta(m,p) = \sum_{i=1}^{3} \|\overrightarrow{M_iH_i}\|^2 = \sum_{i=1}^{3} (y_i - mx_i - p)^2}$$

2. Notons φ cette application. Soient $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda P + \mu Q) &= \big((\lambda P + \mu Q)(-1), (\lambda P + \mu Q)(0), (\lambda P + \mu Q)(2)\big) \\
&= \big(\lambda P(-1) + \mu Q(-1), \lambda P(0) + \mu Q(0), \lambda P(2) + \mu Q(2)\big) \\
&= \lambda\big(P(-1), P(0), P(2)\big) + \mu\big(Q(-1), Q(0), Q(2)\big) \\
\varphi(\lambda P + \mu Q) &= \lambda\varphi(P) + \mu\varphi(Q)
\end{aligned}$$

Donc l'application φ est linéaire. Par ailleurs, si $P \in \mathbb{R}_2[X]$:

$$\begin{aligned}
\varphi(P) = 0 &\implies \big(P(-1), P(0), P(2)\big) = (0,0,0) \\
&\implies P \text{ a trois racines distinctes.} \\
&\implies P = 0.
\end{aligned}$$

En effet, un polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$ qui a plus de deux racines distinctes est le polynôme nul.
L'application φ est donc injective, et comme de plus $\dim \mathbb{R}_2[X] = \dim \mathbb{R}^3 = 3$, on en déduit que :

$$\boxed{\text{L'application } \varphi \text{ est un isomorphisme.}}$$

En particulier, le triplet $(y_1, y_2, y_3) = (-1, 1, 1)$ a un unique antécédent Q par cette application, qui vérifie par définition :

$$\big(Q(x_1), Q(x_2), Q(x_3)\big) = \big(Q(-1), Q(0), Q(2)\big) = (-1, 1, 1) = (y_1, y_2, y_3)$$

ce qu'on peut reformuler de la façon suivante

$$\boxed{\text{Il existe un unique polynôme } Q \in \mathbb{R}_2[X] \text{ vérifiant : } \forall i \in \{1,2,3\},\ \ Q(x_i) = y_i}$$

3. On calcule simplement :

$$\begin{aligned}
\|Q - mX - p\|^2 &= \sum_{i=1}^{3} (Q - mX - p)(x_i)^2 = \sum_{i=1}^{3} (Q(x_i) - mx_i - p)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{3} (y_i - mx_i - p)^2 = \delta(m,p)
\end{aligned}$$

On a bien :

$$\boxed{\delta(m,p) = \|Q - mX - p\|^2}$$

4. On déduit de cette constatation que la droite $\mathcal{D} : y = mx+p$ est la droite qui minimise la distance $\|Q - mX - p\|^2$. Or, on sait que ce minimum est atteint lorsque $mX + p$ est le projeté orthogonal de Q sur $\mathbb{R}_1[X]$:

$$\boxed{\text{La droite } \mathcal{D} \text{ est le projeté orthogonal } Q_0 \text{ du polynôme } Q \text{ sur le plan } \mathrm{Vect}(1, X) = \mathbb{R}_1[X].}$$

5. On construit d'abord une base orthogonale (R_1, R_2) avec :

$$\begin{cases} R_1 &= & 1 \\ R_2 &= & X + \alpha \end{cases}$$

et la condition $(R_1 \,|\, R_2) = 0 = (1 \,|\, X) + \alpha(1 \,|\, 1)$, ce qui donne :

$$\alpha = -\frac{(1 \,|\, X)}{(1 \,|\, 1)} = -\frac{-1+0+2}{1+1+1} = -\frac{1}{3}$$

D'où $R_2 = X - \dfrac{1}{3}$. Enfin, il reste à calculer :

$$(R_2 \,|\, R_2) = \left(-\frac{4}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{42}{9} = \frac{14}{3}$$

$$\boxed{Q_1 = \frac{R_1}{\|R_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad Q_2 = \frac{R_2}{\|R_2\|} = \sqrt{\frac{3}{14}}\left(X - \frac{1}{3}\right)}$$

6. L'expression du projeté orthogonal $p(Q_0)$ de Q_0 sur le plan $\mathrm{Vect}(1, X)$ est donnée par :

$$\begin{aligned} p(Q_0) &= (Q_0 \,|\, Q_1)Q_1 + (Q_0 \,|\, Q_2)Q_2 \\ &= (y_1Q_1(-1) + y_2Q_1(0) + y_3Q_1(2)) \times \frac{1}{\sqrt{3}} \\ &\quad + (y_1Q_2(-1) + y_2Q_2(0) + y_3Q_2(2)) \times \sqrt{\frac{3}{14}}\left(X - \frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{8}{3} \times \frac{3}{14} \times \left(X - \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{7}X + \left(\frac{1}{3} - \frac{4}{21}\right) = \frac{4}{7}X + \frac{1}{7} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{D} \text{ a pour équation } y = \frac{4}{7}x + \frac{1}{7}.}$$

7. De manière générale, lorsqu'on a une famille de points $M_i(x_i, y_i)$, on peut introduire le produit scalaire :

$$(P \,|\, Q) = \sum_{i=1}^{n} P(x_i)Q(x_i)$$

L'application :

$$\begin{cases} \mathbb{R}_{n-1}[X] & \to & \mathbb{R}^n \\ P & \mapsto & (P(x_1), P(x_2), \dots, P(x_n)) \end{cases}$$

est un isomorphisme. Il existe alors un unique polynôme Q tel que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad Q(x_i) = y_i$$

De même que précédemment, la droite de régression linéaire est le projeté orthogonal de Q sur le plan vectoriel $\mathbb{R}_1[X]$.

On pose : $\overline{x} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i$ et $\overline{y} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i$. On vérifie facilement que $(1, X - \overline{x})$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_1[X]$. Dans cette base, l'expression de $p(Q)$ est donnée par :

$$\begin{aligned} p(Q) &= \frac{(Q \,|\, 1)}{(1 \,|\, 1)} \times 1 + \frac{(Q \,|\, X - \overline{x})}{(X - \overline{x} \,|\, X - \overline{x})} \times (X - \overline{x}) \\ &= \overline{y} + \frac{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_iy_i - \overline{xy}}{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \overline{x}^2}(X - \overline{x}) \end{aligned}$$

Finalement :

$$p(Q)(X) = \frac{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \overline{xy}}{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \overline{x}^2} X + \overline{y} - \frac{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \overline{xy}}{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \overline{x}^2} \overline{x}$$

En résumé, la droite cherchée est la droite d'équation $y = ax + b$, où

$$a = \frac{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \overline{x}\,\overline{y}}{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \overline{x}^2} \quad \text{et} \quad b = \overline{y} - a\overline{x}.$$

Cette droite passe évidemment par le point moyen de coordonnées $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ et $\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$.

Lorsque le nuage de points est :

$$M_1(1,1) \quad ; \quad M_2(2,3) \quad ; \quad M_3(3,2) \quad ; \quad M_4(4,3)$$

la formule donne la droite d'équation : $y = \dfrac{x}{2} + 1$.

Correction de l'exercice 8 ▲

On définit l'application ψ de $\mathbb{R}_3[X]^2$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}_3[X]^2 \quad \psi(P,Q) = \sum_{i=0}^{3} P(i)Q(i).$$

1. Il est clair que ψ est une application bilinéaire, symétrique et positive (à faire quand même !). Le seul point délicat est le caractère défini :

   Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $\psi(P,P) = \sum_{i=0}^{3} P(i)^2 = 0$. Chacun des éléments de cette somme étant positif, on a donc :

   $$\forall i \in [\![0,3]\!], \quad P(i)^2 = 0$$

   et donc $P(0) = P(1) = P(2) = P(3) = 0$, ce qui signifie que P est un polynôme de degré inférieur ou égal à 3 qui a quatre racines distinctes : c'est donc le polynôme nul. On a ainsi prouvé que ψ est définie, et donc :

   $$\boxed{\psi \text{ est un produit scalaire sur } \mathbb{R}_3[X].}$$

2. Soit $F = \mathbb{R}_2[X]$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$.
   (a) On calcule simplement :

   $$\psi(1,1) = \sum_{i=0}^{3} 1 = 1+1+1+1 = 4 \qquad \psi(X,X^2) = \sum_{i=0}^{3} i^3 = 36$$
   $$\psi(1,X) = \sum_{i=0}^{3} i = 0+1+2+3 = 6 \qquad \psi(X^2,X^2) = \sum_{i=0}^{3} i^4 = 98$$
   $$\psi(1,X^2) = \psi(X,X) = \sum_{i=0}^{3} i^2 = 14$$

   (b) On note $\mathcal{B}' = \{P_0, P_1, P_2\}$ la base orthonormale de F telle que :

   $$\forall k \in \{0,1,2\} \quad \mathrm{Vect}(P_0, \dots, P_k) = \mathrm{Vect}(1, \dots, X^k) \text{ et } \psi(P_k, X^k) > 0.$$

   Les polynômes P_0, P_1 et P_2 sont obtenus à partir de la base canonique $(1, X, X^2)$ par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt. On procède d'abord en contruisant la base orthogonale (Q_0, Q_1, Q_2) définie comme suit :

$\star$ $Q_0 = 1$.

$\star$ $Q_1 = X + \lambda Q_0$, avec :

$$\lambda = -\frac{\psi(Q_0, X)}{\psi(Q_0, Q_0)} = -\frac{\psi(1, X)}{\psi(1,1)} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$$

soit : $Q_1 = X - \dfrac{3}{2}$

$\star$ $Q_2 = X^2 + \alpha Q_1 + \beta Q_0$, avec :

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{\psi(Q_1, X^2)}{\psi(Q_1, Q_1)} = -\frac{\psi(X, X^2) - \frac{3}{2}\psi(1, X^2)}{\psi(X,X) - 3\psi(1,X) + \frac{9}{4}\psi(1,1)} = -\frac{15}{5} = -3 \\ \beta &= -\frac{\psi(Q_0, X^2)}{\psi(Q_0, Q_0)} = -\frac{\psi(1, X^2)}{\psi(1,1)} = -\frac{14}{4} = -\frac{7}{2} \end{aligned}$$

soit : $Q_2 = X^2 - 3\Big(X - \dfrac{3}{2}\Big) - \dfrac{7}{2} = X^2 - 3X + 1$.

Il reste à normer les vecteurs obtenus :

$\star$ $P_0 = \dfrac{Q_0}{\sqrt{\psi(Q_0, Q_0)}} = \dfrac{1}{2}$

$\star$ $P_1 = \dfrac{Q_1}{\sqrt{\psi(Q_1, Q_1)}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}\Big(X - \dfrac{3}{2}\Big)$

$\star$ $P_2 = \dfrac{Q_2}{\sqrt{\psi(Q_2, Q_2)}}$ avec :

$$\begin{aligned} \psi(Q_2, Q_2) &= \psi(Q_2, X^2 + \alpha Q_1 + \beta Q_0) = \psi(Q_2, X^2) \\ &= \psi(X^2, X^2) - 3\psi(X, X^2) + \psi(1, X^2) = 98 - 36 \times 3 + 14 = 4 \end{aligned}$$

D'où $P_2 = \dfrac{1}{2}(X^2 - 3X + 1)$.

En résumé :

$$\boxed{P_0 = \frac{1}{2} \quad ; \quad P_1 = \frac{\sqrt{5}}{5}\Big(X - \frac{3}{2}\Big) \quad ; \quad P_2 = \frac{1}{2}(X^2 - 3X + 1)}$$

3. Soit $(x_0, x_1, x_2, x_3) = (1, 3, 2, 3)$. On considère l'ensemble des sommes :

$$\Sigma = \left\{ \sum_{i=0}^{3} \big[x_i - P(i)\big]^2 \ , \ P \in F \right\}.$$

   (a) On peut justifier l'existence et l'unicité du polynôme R de $\mathbb{R}_3[X]$ vérifiant $\forall i \in \{0,1,2,3\}$ $R(i) = x_i$ en prouvant que l'application :

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}^4 \\ P & \mapsto & (P(0), P(1), P(2), P(3)) \end{array} \right.$$

   est un isomorphisme. Il est clair que celle-ci est linéaire. Prouvons qu'elle est injective :

$$\varphi(P) = 0 \Rightarrow P(0) = P(1) = P(2) = P(3) = 0 \Rightarrow P = 0$$

   En effet un polynôme de degré inférieur ou égal à 3 qui a quatre racines distinctes est le polynôme nul. Donc φ est injective et, par égalité des dimensions des espaces de départ et d'arrivée, φ est bijective. Donc :

$$\boxed{\text{Il existe un unique polynôme } R \text{ de } \mathbb{R}_3[X] \text{ vérifiant } \forall i \in \{0,1,2,3\} \ \ R(i) = x_i.}$$

4. On sait que F étant de dimension finie, et (P_0, P_1, P_2) une base orthonormée de F, le projeté orthogonal de R sur F s'écrit :

$$p(R) = \psi(R, P_0)P_0 + \psi(R, P_1)P_1 + \psi(R, P_2)P_2$$

Il ne reste qu'à calculer :

$$\begin{aligned}
\psi(R,P_0) &= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{3} R(i) = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{3} x_i = \frac{9}{2}\\
\psi(R,P_1) &= \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\sum_{i=0}^{3} iR(i) - \frac{3}{2}\sum_{i=0}^{3} R(i)\right) = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(16-\frac{27}{2}\right) = \frac{\sqrt{5}}{2}\\
\psi(R,P_2) &= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=0}^{3} i^2R(i) - 3\sum_{i=0}^{3} iR(i) + \sum_{i=0}^{3} R(i)\right)\\
&= \frac{1}{2}(38-48+9) = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

D'où $p(R) = \frac{9}{2}P_0 + \frac{\sqrt{5}}{2}P_1 - \frac{1}{2}P_2 = \frac{9}{4} + \frac{1}{2}\left(X-\frac{3}{2}\right) - \frac{1}{4}(X^2-3X+1)$. En simplifiant :

$$\boxed{p(R) = -\frac{1}{4}X^2 + \frac{5}{4}X + \frac{5}{4}}$$

5. On remarque que la norme associée au produit scalaire ψ est :

$$\|P\| = \sqrt{\psi(P,P)} = \sqrt{\sum_{i=0}^{3} P^2(i)}$$

et que :

$$\Sigma = \left\{\sum_{i=0}^{3}\big[R(i)-P(i)\big]^2 \ ,\ P\in F\right\} = \left\{\|R-P\|^2 \ ,\ P\in F\right\}$$

Donc l'ensemble Σ est l'ensemble des distances du polynôme R à un polynôme P de F. Le minimum de Σ est par conséquent atteint lorsque P est le projeté orthogonal de R sur F, c'est à dire :

$$\boxed{\Sigma \text{ possède un minimum } m \text{ et un seul atteint pour } S = -\frac{1}{4}X^2 + \frac{5}{4}X + \frac{5}{4} \in F.}$$

Le minimum peut alors se calculer :

$$\begin{aligned}
m &= \sum_{i=0}^{3}\big[x_i - p(R)(i)\big]^2 = [1-\frac{5}{4}]^2 + [3-\frac{9}{4}]^2 + [2-\frac{11}{4}]^2 + [3-\frac{11}{4}]^2\\
&= \frac{1}{16}+\frac{9}{16}+\frac{9}{16}+\frac{1}{16}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Le minimum de } \Sigma \text{ est } 5/4.}$$

Correction de l'exercice 9 ▲

Pour $k\in\mathbb{N}$, on note $\frac{\mathrm{d}^kP}{\mathrm{d}x^k}$ la dérivée $k^{\text{ème}}$ d'un polynôme P.

On considère, pour $n\in\mathbb{N}$, les fonctions polynomiales définies sur I par :

$$U_n(x) = (x^2-1)^n \quad \text{et} \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^nU_n}{\mathrm{d}x^n}(x)$$

En particulier, avec les conventions usuelles : $U_0(x) = P_0(x) = 1$.

A toute fonction polynomiale P, on associe le polynôme $L(P)$ défini sur I par :

$$L(P)(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(x^2-1)\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}(x)\right]$$

Partie I :

1. Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
L(\lambda P+\mu Q)(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(x^2-1)\frac{\mathrm{d}(\lambda P+\mu Q)}{\mathrm{d}x}(x)\right]\\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(x^2-1)\left(\lambda\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}(x)+\mu\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x}(x)\right)\right]\\
&= \lambda\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(x^2-1)\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}(x)\right]+\mu\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(x^2-1)\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x}(x)\right]\\
L(\lambda P+\mu Q)(x) &= \lambda L(P)+\mu L(Q)
\end{aligned}$$

$$\boxed{L \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}[X].}$$

2. On note L_n la restriction de l'endomorphisme L au sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$.

2.a Si P est de degré inférieur ou égal à n, alors P' est de degré inférieur ou égal à $n-1$, donc $(X^2-1)P'$ est de degré inférieur ou égal à $n+1$. Enfin $\left[(X^2-1)P'\right]'$ est de degré inférieur ou égal à n. En conclusion :

$$\boxed{L_n \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X].}$$

2.b On calcule pour $2 \leqslant k \leqslant n$:

$$\begin{aligned}
L_n(1)(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(x^2-1)\times 0\right]=0\\
L_n(X)(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(x^2-1)\times 1\right]=2x\\
L_n(X^k)(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(x^2-1)\times kx^{k-1}\right]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[kx^{k+1}-kx^{k-1}\right]\\
&= k(k+1)x^k-k(k-1)x^{k-2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{L_n(1)=0,\ L_n(X)=2X, \text{ et } L_n(X^k)=k(k+1)X^k-k(k-1)X^{k-2} \text{ pour tout } 2\leqslant k\leqslant n.}$$

2.c La matrice de L_n relativement à la base canonique $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$:

$$\boxed{\mathcal{M}at_{(1,X,X^2,\ldots,X^n)}L_n=\begin{pmatrix}
0 & 0 & -2 & 0 & \cdots & 0\\
0 & 2 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\
\vdots & 0 & 6 & \ddots & \ddots & 0\\
\vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & -n(n-1)\\
 & & & & & 0\\
0 & \cdots & \cdots & & 0 & n(n+1)
\end{pmatrix}}$$

3. Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$. Par une intégration par parties, on trouve :

$$\begin{aligned}
(L(P)\,|\,Q) &= \int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(x^2-1)\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}(x)\right]Q(x)\,\mathrm{d}x\\
&= \left[(x^2-1)\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}(x)Q(x)\right]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}(x^2-1)\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}(x)\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x}(x)\,\mathrm{d}x\\
(L(P)\,|\,Q) &= -\int_{-1}^{1}(x^2-1)\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}(x)\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x}(x)\,\mathrm{d}x=-\int_{-1}^{1}(x^2-1)\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x}(x)\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}(x)\,\mathrm{d}x=(P\,|\,L(Q))
\end{aligned}$$

$$\boxed{(L(P)\,|\,Q)=(P\,|\,L(Q))}$$

Partie II :

1. 1.a On calcule d'abord :

$$\begin{array}{rcl} P_1(x) & = & \dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}[x^2-1]}{\mathrm{d}x} = x \\ P_2(x) & = & \dfrac{1}{8}\dfrac{\mathrm{d}^2[x^4-2x^2+1]}{\mathrm{d}x^2} = \dfrac{1}{8}\dfrac{\mathrm{d}[4x^3-4x]}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{8}(12x^2-4) = \dfrac{3}{2}x^2 - \dfrac{1}{2} \\ P_3(x) & = & \dfrac{1}{48}\dfrac{\mathrm{d}^3[x^6-3x^4+3x^2-1]}{\mathrm{d}x^3} = \dfrac{1}{8}\dfrac{\mathrm{d}^2[x^5-2x^3+x]}{\mathrm{d}x^2} \\ & = & \dfrac{1}{8}\dfrac{\mathrm{d}[5x^4-6x^2+1]}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{8}(20x^3-12x) = \dfrac{5}{2}x^3 - \dfrac{3}{2}x \end{array}$$

$$\boxed{P_1 = X \quad ; \quad P_2 = \frac{3}{2}X^2 - \frac{1}{2} \quad ; \quad P_3 = \frac{5}{2}X^3 - \frac{3}{2}X}$$

1.b U_n est de degré $2n$ et de coefficient dominant 1. Or :

$$\frac{\mathrm{d}^n[x^{2n}]}{\mathrm{d}x^n} = 2n(2n-1)\cdots(n+1)x^n = \frac{(2n)!}{n!}x^n$$

Donc P_n est de degré n et son coefficient dominant est : $a_n = \dfrac{1}{2^n n!} \times \dfrac{(2n)!}{n!}$.

$$\boxed{a_n = \frac{\binom{2n}{n}}{2^n}}$$

1.c La famille $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une famille étagée de polynômes (non nuls et de degrés deux à deux distincts). Il s'agit donc d'une famille libre et comme elle compte $n+1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$ éléments, on peut en conclure que :

$$\boxed{P_0, P_1, \ldots, P_n \text{ forment une base de } \mathbb{R}_n[X].}$$

2. D'après la formule de Leibniz :

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left((x-1)^{2n}\right) & = & \dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left((x-1)^n(x+1)^n\right) \\ & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\left((x-1)^n\right) \frac{\mathrm{d}^{n-k}}{\mathrm{d}x^{n-k}}\left((x+1)^n\right) \\ & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} n(n-1)\cdots(n-k+1)(x-1)^{n-k} \times n(n-1)\cdots(k+1)(x+1)^k \\ & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!}(x-1)^{n-k} \times \frac{n!}{k!}(x+1)^k \\ & = & \dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left((x-1)^n(x+1)^n\right) \\ \dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left((x-1)^{2n}\right) & = & n!\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 (x-1)^{n-k}(x+1)^k \end{array}$$

On en déduit immédiatement que :

$$\boxed{P_n(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 (x-1)^{n-k}(x+1)^k}$$

puis que :

$$\begin{array}{rcl} P_n(1) & = & \dfrac{1}{2^n}\dbinom{n}{n}^2 (1+1)^n = 1 \\ P_n(-1) & = & \dfrac{1}{2^n}\dbinom{n}{0}^2 (-1-1)^n = (-1)^n \end{array}$$

$$\boxed{P_n(1) = 1 \quad \text{et} \quad P_n(-1) = (-1)^n}$$

3. 3.a On a par dérivation :

$$U'_{n+1}(x) = (n+1) \times 2x(x^2-1)^n = 2(n+1)xU_n(x)$$

et d'autre part :

$$(x^2-1)U'_n(x) = (x^2-1) \times 2nx(x^2-1)^{n-1} = 2nx(x^2-1)^n = 2nxU_n(x)$$

D'où les relations :

$$\boxed{U'_{n+1}(x) - 2(n+1)xU_n(x) = 0.} \tag{5}$$

$$\boxed{(x^2-1)U'_n(x) - 2nxU_n(x) = 0.} \tag{6}$$

3.b En dérivant $n+1$ fois (1), on a :

$$\frac{\mathrm{d}^{n+1}[U'_{n+1}(x)]}{\mathrm{d}x^{n+1}} = 2(n+1)\frac{\mathrm{d}^{n+1}[xU_n(x)]}{\mathrm{d}x^{n+1}}$$

Puis on applique à droite la formule de Leibniz :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^{n+2}[U_{n+1}(x)]}{\mathrm{d}x^{n+2}} &= 2(n+1)\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\frac{\mathrm{d}^k[x]}{\mathrm{d}x^k} \times \frac{\mathrm{d}^{n+1-k}[U_n(x)]}{\mathrm{d}x^{n+1-k}} \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\mathrm{d}^{n+1}[U_{n+1}(x)]}{\mathrm{d}x^{n+1}}\right] &= 2(n+1)\left[x\frac{\mathrm{d}^{n+1}[U_n(x)]}{\mathrm{d}x^{n+1}} + (n+1)\frac{\mathrm{d}^n[U_n(x)]}{\mathrm{d}x^n}\right]
\end{aligned}$$

Enfin :

$$\begin{aligned}
2^{n+1}(n+1)!P'_{n+1}(x) &= 2(n+1)\big[x \times 2^n n!P'_n(x) + (n+1) \times 2^n n!P_n(x)\big] \\
&= 2^{n+1}(n+1)!xP'_n(x) + (n+1)2^{n+1}(n+1)!P_n(x)
\end{aligned}$$

$$\boxed{P'_{n+1}(x) = xP'_n(x) + (n+1)P_n(x)} \tag{7}$$

En dérivant $n+1$ fois (2), on a :

$$\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}\Big[(x^2+1)U'_n(x)\Big] = 2n\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}\Big[xU_n(x)\Big]$$

Là encore, on utilise des deux côtés la formule de Leibniz :

$$\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\frac{\mathrm{d}^k[x^2+1]}{\mathrm{d}x^k} \times \frac{\mathrm{d}^{n+1-k}[U'_n(x)]}{\mathrm{d}x^{n+1-k}} = 2n\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\frac{\mathrm{d}^k[x]}{\mathrm{d}x^k} \times \frac{\mathrm{d}^{n+1-k}[U_n(x)]}{\mathrm{d}x^{n+1-k}}$$

Ce qui s'écrit plus simplement :

$$(x^2+1)\frac{\mathrm{d}^{n+2}U_n(x)}{\mathrm{d}x^{n+2}} + 2(n+1)x\frac{\mathrm{d}^{n+1}U_n(x)}{\mathrm{d}x^{n+1}} + 2\frac{n(n+1)}{2}\frac{\mathrm{d}^nU_n(x)}{\mathrm{d}x^n} = 2n\left[x\frac{\mathrm{d}^{n+1}U_n(x)}{\mathrm{d}x^{n+1}} + (n+1)\frac{\mathrm{d}^nU_n(x)}{\mathrm{d}x^n}\right]$$

ou encore, en regroupant convenablement :

$$(x^2+1)\frac{\mathrm{d}^{n+2}U_n(x)}{\mathrm{d}x^{n+2}} + 2x\frac{\mathrm{d}^{n+1}U_n(x)}{\mathrm{d}x^{n+1}} = n(n+1)\frac{\mathrm{d}^nU_n(x)}{\mathrm{d}x^n}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(x^2+1)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}^nU_n(x)}{\mathrm{d}x^n}\right)\right] = n(n+1)\frac{\mathrm{d}^nU_n(x)}{\mathrm{d}x^n}$$

En divisant par $2^n n!$, on retrouve :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(x^2+1)\frac{\mathrm{d}P_n(x)}{\mathrm{d}x}\right] = n(n-1)P_n(x)$$

ce qui n'est autre que la relation :

$$\boxed{L(P_n) = n(n+1)P_n} \tag{8}$$

3.c D'après la relation (4), on a si $m \neq n$:

$$\begin{array}{rcl}(L(P_n)\,|\,P_m) & = & n(n+1)(P_n\,|\,P_m)\\ (P_n\,|\,L(P_m)) & = & m(m+1)(P_n\,|\,P_m)\end{array}$$

Or, d'après la question I.3, $(L(P_n)\,|\,P_m) = (P_n\,|\,L(P_m))$, d'où :

$$[n(n+1) - m(m+1)]\,(P_n\,|\,P_m) \quad = \quad 0$$

Finalement, $(P_n\,|\,P_m) = 0$:

$$\boxed{\text{Si } m \neq n,\ (P_n\,|\,P_m) = 0.}$$

4. 4.a Soit $Q \in \mathbb{R}_n[X]$. La famille $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$, donc il existe $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que :

$$Q = \lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_n P_n$$

D'où :

$$(Q\,|\,P_{n+1}) = \lambda_0(P_0\,|\,P_{n+1}) + \lambda_1(P_1\,|\,P_{n+1}) + \cdots + \lambda_n(P_n\,|\,P_{n+1}) = 0$$

En effet, d'après la question 3.c, On a $(P_i\,|\,P_{n+1}) = 0$ pour $i \leqslant n$.

$$\boxed{\text{Pour tout } Q \in \mathbb{R}_n[X],\ (P_{n+1}\,|\,Q) = 0.}$$

4.b On suppose que P_{n+1} a moins de $n+1$ racines distinctes dans $]-1,1[$ et on note $a_1, \dots, a_p$ (avec $p \leqslant n$) les valeurs comprises strictement entre -1 et 1 telles que la fonction $x \mapsto P_{n+1}(x)$ s'annule en changeant de signe. Soit :

$$Q(x) = \prod_{i=1}^{p}(X - a_i)$$

La fonction $x \mapsto P_{n+1}(x)Q(x)$ est de signe constant et positive sur $]-1,1[$ et son intégrale sur cet intervalle est nulle puisque :

$$\int_{-1}^{1} P_{n+1}(x)Q(x)\,\mathrm{d}x = (P_{n+1}\,|\,Q) = 0, \quad \text{d'après 4.a}$$

Ceci prouve que $x \mapsto P_{n+1}(x)Q(x)$ est la fonction nulle, ce qui est faux. En conclusion :

$$\boxed{P_{n+1} \text{ possède exactement } n+1 \text{ racines distinctes, toutes dans l'intervalle }]-1,1[.}$$

5. 5.a Remarquons qu'on peut noter $P_n = a_n X^n + Q_1(x)$ et $P'_{n+1} = (n+1)a_{n+1}x^n + Q_2(x)$ où Q_1 et Q_2 sont des polynômes de degré inférieur ou égal à $n-1$. Avec ces notations :

$$\begin{array}{rcl}(P'_{n+1}\,|\,P_n) & = & ((n+1)a_{n+1}X^n\,|\,P_n) + (Q_2\,|\,P_n)\\ & = & (n+1)a_{n+1}(X^n\,|\,P_n) \quad \text{d'après 4.a}\end{array}$$

et d'autre part :

$$\begin{array}{rcl}\|P_n\|^2 = (P_n\,|\,P_n) & = & (a_n X^n\,|\,P_n) + (Q_1\,|\,P_n)\\ & = & a_n(X^n\,|\,P_n) \quad \text{d'après 4.a}\end{array}$$

Avec ces deux égalités, on en déduit de suite :

$$\boxed{(P'_{n+1}\,|\,P_n) = (n+1)\frac{a_{n+1}}{a_n}\|P_n\|^2 = (2n+1)\|P_n\|^2}$$

5.b Par ailleurs, avec l'intégration par parties suivante :

$$\begin{array}{lcl}u(x) = P_n^2(x) & \text{et} & v'(x) = 1\\ u'(x) = 2P'_n(x)P_n(x) & & v(x) = x\end{array}$$

$$\|P_n\|^2 = \int_{-1}^{1} P_n^2(x)\,\mathrm{d}x = \left[xP_n^2(x)\right]_{-1}^{1} - 2\int_{-1}^{1} xP_n(x)P'_n(x)$$

avec $\left[xP_n^2(x)\right]_{-1}^{1} = P_n^2(1) + P_n^2(-1) = 2$, d'après 2.

$$\boxed{\|P_n\|^2 = 2 - 2\int_{-1}^{1} xP_n(x)P'_n(x)\,\mathrm{d}x}$$

5.c D'après la relation (3), on sait que $xP_n'(x) = P_{n+1}'(x) - (n+1)P_n(x)$, d'où :

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} xP_n(x)P_n'(x) &= \int_{-1}^{1} P_{n+1}'(x)P_n(x)\,\mathrm{d}x - (n+1)\int_{-1}^{1} P_n^2(x)\,\mathrm{d}x \\ &= (P_{n+1}' \,|\, P_n) - (n+1)\|P_n\|^2 \\ &= n\|P_n\|^2 \quad \text{en utilisant le résultat de 5.a.}\end{aligned}$$

Il reste à injecter cette valeur dans le résultat de 5.b :

$$\|P_n\|^2 = 2 - 2n\|P_n\|^2$$

et on en déduit que :

$$\boxed{\|P_n\|^2 = \frac{2}{2n+1}.}$$

Remarque : On peut calculer la norme de P_n plus simplement :
De même qu'en 5.a, on a $xP_n'(x) = na_nx^n + Q(x)$ avec $\deg Q \leqslant n-1$, et :

$$\|P_n\|^2 = 2 - 2(P_n \,|\, XP_n') = 2 - 2n(P_n \,|\, a_nX^n) = 2 - 2n\|P_n\|^2$$

On en déduit immédiatement que :

$$\boxed{\|P_n\|^2 = \frac{2}{2n+1}.}$$

6. On sait que la famille $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$, et le projeté orthogonal de X^{n+1} sur $R_n[X]$ s'exprime donc :

$$p(X^{n+1}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(P_k \,|\, X^{n+1})}{\|P_k\|^2} P_k$$

Le calcul ici n'est pas simple : il est préférable d'utiliser le projeté orthogonal $q(X^{n+1})$ de X^{n+1} sur le supplémentaire orthogonal $\mathrm{Vect}(P_{n+1})$ de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_{n+1}[X]$, c'est à dire :

$$q(X^{n+1}) = \frac{(X^{n+1} \,|\, P_{n+1})}{\|P_{n+1}\|^2} P_{n+1}$$

Et il s'ensuit :

$$\begin{aligned} d(X^{n+1}, \mathbb{R}_n[X]) &= \|X^{n+1} - p(X^{n+1})\| = \|q(X^{n+1})\| \\ &= \frac{|(X^{n+1} \,|\, P_{n+1})|}{\|P_{n+1}\|}\end{aligned}$$

Il reste à calculer, en notant $X^{n+1} = \dfrac{P_{n+1}}{a_{n+1}} + Q$ avec $\deg Q \leqslant n$:

$$(X^{n+1} \,|\, P_{n+1}) = \frac{1}{a_{n+1}}\|P_{n+1}\|^2 = \frac{2^{n+1}}{\binom{2n+2}{n+1}}\|P_{n+1}\|^2$$

Et on peut achever le calcul :

$$d(X^{n+1}, \mathbb{R}_n[X]) = \frac{2^{n+1}}{\binom{2n+2}{n+1}}\|P_{n+1}\|$$

$$\boxed{d(X^{n+1}, \mathbb{R}_n[X]) = \frac{2^{n+3/2}}{\sqrt{2n+1}\binom{2n+2}{n+1}}}$$

Correction de l'exercice 10 ▲

Partie A : Étude d'un endomorphisme

Étant donné un polynôme P de E, on définit un polynôme $\phi(P)$ par :

$$[\phi(P)](X) = (X^2-1)P''(X) + 2XP'(X).$$

1. Il suffit de vérifier que ϕ est linéaire. Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcl} [\phi(\lambda P+\mu Q)](X) & = & (X^2-1)(\lambda P+\mu Q)''(X)+2X(\lambda P+\mu Q)'(X) \\ & = & \lambda(X^2-1)P''(X)+\mu(X^2-1)Q''(X)+2\lambda XP'(X)+2\mu XQ'(X) \\ & = & \lambda\big((X^2-1)P''(X)+2XP'(X)\big)+\mu\big((X^2-1)Q''(X)+2XQ'(X)\big) \end{array}$$

On retrouve bien $\phi(\lambda P+\mu Q)=\lambda\phi(P)+\mu\phi(Q)$:

$$\boxed{\phi \text{ est un endomorphisme de } E.}$$

2. Si $n \in \mathbb{N}$ et $P \in E_n$ alors $\deg(P') \leqslant n-1$ et $\deg(P'') \leqslant n-2$, donc :

$$\deg\big((X^2-1)P''(X)\big) \leqslant n \quad \text{et} \quad \deg\big(2XP'(X)\big) \leqslant n$$

Et en effectuant la somme, on constate que $\phi(P) \in E_n$:

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n, \text{ le sous-espace vectoriel } E_n \text{ est stable par } \phi.}$$

On notera désormais φ_n l'endomorphisme de E_n induit par ϕ sur E_n :

$$\forall P \in E_n, \quad \varphi_n(P)=\phi(P)$$

3. Dans cette question, on suppose que n est égal à 3.

3a. On calcule rapidement $\varphi_3(1)=0$, $\varphi_3(X)=2X$ et $\varphi_3(X^2)=2(X^2-1)+2X\times 2X=6X^2-2$.

$$\boxed{M_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}}$$

3b. La matrice de φ_3 est triangulaire supérieure. Ses valeurs propres sont donc situées sur la diagonale de M_3 : $\mathrm{Spec}(\varphi_3)=\{0,2,6\}$. Celles-ci sont toutes distinctes, ce qui justifie que :

$$\boxed{\varphi_3 \text{ est diagonalisable.}}$$

3c. On cherche une base de E_3 diagonalisant φ_3, formée de polynômes de coefficients dominants égaux à 1. Il est clair que les polynômes 1 et X conviennent puisque ce sont des vecteurs propres associés aux valeurs propres 0 et 2. Pour le troisième vecteur, on résout :

$$\begin{array}{rcl} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(M_3-6I_3) & \Leftrightarrow & (M_3-6I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} -6x-2z & = & 0 \\ -4y & = & 0 \\ 0 & = & 0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} z & = & -3x \\ y & = & 0 \end{array}\right. \end{array}$$

Donc $\mathrm{Ker}(M_3-6I_3)=\mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$, et $\mathrm{Ker}\left(\varphi_3-6Id_{E_3}\right)=\mathrm{Vect}(3X^2-1)$.

$$\boxed{\left(1, X, 3X^2-1\right) \text{ est une base de } E_3 \text{ qui diagonalise } \varphi_3.}$$

4. On revient au cas général d'un entier naturel n quelconque.

4a. On procède de même que dans les questions précédentes :

$$\forall k \in [\![2,n]\!], \quad \varphi_n(X^k)=(X^2-1)k(k-1)X^{k-2}+2XkX^{k-1}=k(k+1)X^k-k(k-1)X^{k-2}$$

Ce calcul permet d'écrire la matrice de φ_n dans la base canonique :

$$M_n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 6 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & -n(n-1) \\ 0 & 0 & & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 & n(n+1) \end{pmatrix}$$

On constate que :

$$\boxed{\text{La matrice } M_n \text{ de } \varphi_n \text{ dans la base canonique est triangulaire supérieure.}}$$

On peut préciser :

$$\boxed{\text{Les éléments diagonaux de } M_n \text{ sont } 1, 2, 6, \ldots, n(n+1).}$$

4b. On sait que le polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire supérieure est scindé et que les valeurs propres se situent sur la diagonale. Donc le polynôme caractéristique de φ_n est scindé et ses valeurs propres $1, 2, 6, \ldots, n(n+1)$ sont toutes distinctes. On en déduit que :

$$\boxed{\varphi_n \text{ est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont de dimension 1.}}$$

Partie B : Étude d'une famille de polynômes

Pour tout entier naturel n, on définit le polynôme L_n par

$$L_n(X) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 (X-1)^{n-k}(X+1)^k.$$

1. En utilisant la définition, on a :

$$\begin{aligned}
L_0 &= 1 \\
L_1 &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k}^2 (X-1)^{1-k}(X+1)^k = \frac{1}{2}\big((X-1)+(X+1)\big) \\
&= X \\
L_2 &= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k}^2 (X-1)^{2-k}(X+1)^k = \frac{1}{4}\big((X-1)^2 + 4(X-1)(X+1) + (X+1)^2\big) \\
&= \frac{1}{4}(6X^2-2) = \frac{3}{2}X^2 - \frac{1}{2} \\
L_3 &= \frac{1}{8} \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k}^2 (X-1)^{1-k}(X+1)^3 \\
&= \frac{1}{8}\big((X-1)^3 + 9(X-1)^2(X+1) + 9(X-1)(X+1)^2 + (X+1)^3\big) \\
&= \frac{1}{8}(20X^3 - 12X) = \frac{5}{2}X^3 - \frac{3}{2}X
\end{aligned}$$

On a donc sous forme simplifiée :

$$\boxed{L_0 = 1 \quad ; \quad L_1 = X \quad ; \quad L_2 = \frac{3}{2}X^2 - \frac{1}{2} \quad ; \quad L_3 = \frac{5}{2}X^3 - \frac{3}{2}X}$$

2. Remarquons que $L_n(X) = \frac{1}{2^n}(X+1)^n + \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k}^2 (X-1)^{n-k}(X+1)^k$.

$$L_n(1) = \frac{1}{2^n}(1+1)^n + \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k}^2 (1-1)^{n-k}(1+1)^k = 1$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad L_n(1) = 1}$$

3. Conservons uniquement les éléments de plus haut degré de chacun des termes de la somme :

$$\begin{aligned}
L_n(X) &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 (X-1)^{n-k}(X+1)^k = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 (X^{n-k}+\cdots)(X^k+\cdots) \\
&= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 (X-1)^{n-k}(X+1)^k = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 (X^n+\cdots)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Le polynôme } L_n \text{ est de degré } n \text{ et son coefficient dominant est } \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2.}$$

4. En utilisant la définition de L_n, on trouve :

$$\begin{aligned} L_n(-X) &= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2(-X-1)^{n-k}(-X+1)^k \\ &= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2(-1)^{n-k}(X+1)^{n-k}(-1)^k(X-1)^k \\ L_n(-X) &= (-1)^n\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2(X+1)^{n-k}(X-1)^k \end{aligned}$$

On pose maintenant le changement d'indice $p=n-k$:

$$\begin{aligned} L_n(-X) &= (-1)^n\frac{1}{2^n}\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{n-p}^2(X+1)^{p}(X-1)^{n-p} \\ &= (-1)^n\frac{1}{2^n}\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}^2(X-1)^{n-p}(X+1)^{p} = (-1)^nL_n(X) \end{aligned}$$

Ce calcul prouve que L_n est pair (resp. impair) si n est pair (resp. impair).

$$\boxed{L_n \text{ a la même parité que } n.}$$

5. Remarquons, à l'aide de la formule de Leibniz, que :

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}X^n}[(X^2-1)^n] = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}X^n}[(X+1)^n(X-1)^n] = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\mathrm{d}^{n-k}}{\mathrm{d}X^{n-k}}[(X+1)^n]\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}X^k}[(X-1)^n]$$

avec, par une récurrence simple :

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}X^k}[(X-1)^n] = \frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}X^{k-1}}[n(X-1)^{n-1}] = \cdots = n(n-1)\cdots(n-k+1)(X-1)^{n-k}$$

$\dfrac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}X^k}[(X-1)^n] = \dfrac{n!}{(n-k)!}(X-1)^{n-k}$, et de même : $\dfrac{\mathrm{d}^{n-k}}{\mathrm{d}X^{n-k}}[(X+1)^n] = \dfrac{n!}{k!}(X+1)^k$.

On reporte ces résultats :

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}X^n}[(X^2-1)^n] &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\times\frac{(n!)^2}{k!(n-k)!}(X+1)^k(X-1)^{n-k} \\ &= n!\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2(X+1)^k(X-1)^{n-k} = 2^nn!L_n(X) \end{aligned}$$

Il est bien prouvé que :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ \ L_n(X) = \frac{1}{2^nn!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}X^n}[(X^2-1)^n].}$$

6. En écrivant uniquement le terme de plus haut degré, on a :

$$\begin{aligned} L_n(X) &= \frac{1}{2^nn!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}X^n}[X^{2n}+\cdots] = \frac{1}{2^nn!}\times 2n(2n-1)\cdots(n+1)X^n+\cdots \\ &= \frac{1}{2^nn!}\times\frac{(2n)!}{n!}X^n+\cdots = \frac{1}{2^n}\binom{2n}{n}X^n+\cdots \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Le coefficient dominant de } L_n \text{ est } \frac{1}{2^n}\binom{2n}{n}.}$$

On trouve l'égalité $\dfrac{1}{2^n}\dbinom{2n}{n} = \dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$ en identifiant ce résultat avec celui trouvé à la question 3, c'est à dire :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ \ \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.}$$

7. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$:
$$|L_n(x)| \leqslant \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 |x-1|^k |x+1|^{n-k}$$
Or, d'après l'inégalité triangulaire : $|x-1| = |x+(-1)| \leqslant |x|+1$ et $|x+1| \leqslant |x|+1$, d'où :
$$|L_n(x)| \leqslant \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 (|x|+1)^n = \left(\frac{1+|x|}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$
On conclut avec la relation établie à la question précédente :
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \ \ |L_n(x)| \leqslant \left(\frac{1+|x|}{2}\right)^n \binom{2n}{n}.}$$

8. On définit, pour tout entier naturel n, le polynôme $U_n(X) = (X^2-1)^n$.

   8a. Calculons simplement $U_n'(X) = 2nX(X^2-1)^{n-1}$. Ainsi :
$$(X^2-1)U_n'(X) = 2nX(X^2-1)^n = 2nXU_n(X)$$
   On a bien vérifié que :
$$\boxed{(X^2-1)U_n'(X) = 2nXU_n(X).}$$

   8b. Dérivons $n+1$ fois cette relation par la formule de Leibniz :
$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \frac{\mathrm{d}^{n+1-k}}{\mathrm{d}X^{n+1-k}}[U_n'(X)] \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}X^k}[(X^2-1)] = 2n \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \frac{\mathrm{d}^{n+1-k}}{\mathrm{d}X^{n+1-k}}[U_n(X)] \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}X^k}[X]$$
   En conservant les termes non nuls de ces sommes, on obtient l'égalité :
$$(X^2-1)U_n^{(n+2)}(X) + 2(n+1)XU_n^{(n+1)}(X) + n(n+1)U_n^{(n)}(X) = 2nXU_n^{(n+1)}(X) + 2n(n+1)U_n^{(n)}(X)$$
   En simplifiant cette dernière égalité, on trouve :
$$(X^2-1)U_n^{(n+2)}(X) + 2XU_n^{(n+1)}(X) = n(n+1)U_n^{(n)}(X)$$
   Rappelons pour finir que d'après la question 5, on peut écrire $U_n^{(n)} = 2^n n! L_n(X)$. La relation devient :
$$(X^2-1) \times 2^n n! L_n''(X) + 2X2^n n! L_n'(X) = n(n+1)2^n n! L_n(X)$$
   Soit, en simplifiant : $(X^2-1)L_n''(X) + 2XL_n'(X) = n(n+1)L_n(X)$. On reconnaît la relation :
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ \ \phi(L_n) = n(n+1)L_n.}$$

Partie C : Définition d'un produit scalaire

On pose
$$\forall (P,Q) \in E^2, \ \ (P\,|\,Q) = \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)\,\mathrm{d}x.$$
On admet qu'il s'agit d'un produit scalaire sur E (et sur ses sous espaces E_n).

1. 1a. Soit $(P,Q) \in E^2$. On a par linéarité :
$$\begin{aligned}(\phi(P)\,|\,Q) &= \int_{-1}^{1} \big((x^2-1)P''(x) + 2xP'(x)\big)Q(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-1}^{1} (x^2-1)P''(x)Q(x)\,\mathrm{d}x + 2\int_{-1}^{1} xP'(x)Q(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$
   Dans la première intégrale, effectuons l'intégration par parties :
$$\begin{array}{lcl} u(x) = (x^2-1)Q(x) & \text{et} & v'(x) = P''(x) \\ u'(x) = 2xQ(x) + (x^2-1)Q'(x) & & v(x) = P'(x) \end{array}$$

$$\begin{aligned}(\phi(P)\,|\,Q) &= \left[(x^2-1)Q(x)P'(x)\right]_{-1}^{1} - 2\int_{-1}^{1} xQ(x)P'(x)\,\mathrm{d}x - \int_{-1}^{1}(x^2-1)P'(x)Q'(x)\,\mathrm{d}x \\ &\quad +2\int_{-1}^{1} xP'(x)Q(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

En simplifiant, le résultat obtenu est :

$$\boxed{\forall (P,Q)\in E^2,\ \ (\phi(P)\,|\,Q) = \int_{-1}^{1}(1-x^2)P'(x)Q'(x)\,\mathrm{d}x.}$$

1b. Pour les endomorphismes φ_n ($n\in\mathbb{N}$), ce résultat devient :

$$\boxed{\forall (P,Q)\in E_n^2,\ \ (\varphi_n(P)\,|\,Q) = \int_{-1}^{1}(1-x^2)P'(x)Q'(x)\,\mathrm{d}x.}$$

1c. Soit $p,q\in\mathbb{N}$ avec $p\neq q$. Grâce au résultat final de la partie B, on a d'une part :

$$(p(p+1)L_p\,|\,L_q) = (\varphi_n(L_p)\,|\,L_q) = \int_{-1}^{1}(1-x^2)L_p'(x)L_q'(x)\,\mathrm{d}x$$

et d'autre part :

$$(L_p\,|\,q(q+1)L_q) = (L_p\,|\,\varphi_n(L_q)) = \int_{-1}^{1}(1-x^2)L_p'(x)L_q'(x)\,\mathrm{d}x$$

puis, en regroupant les deux résultats :

$$0 = (p(p+1)L_p\,|\,L_q) - (L_p\,|\,q(q+1)L_q) = \underbrace{\left[p(p+1)-q(q+1)\right]}_{\neq 0}(L_p\,|\,L_q)$$

D'où, si $p\neq q$, $(L_p\,|\,L_q)=0$. En conclusion :

$$\boxed{\text{Les polynômes } L_p \text{ sont deux à deux orthogonaux.}}$$

2. Soit n un entier naturel.

2a. Montrons par récurrence sur k que

$$\forall k\in[\![0,n]\!]\,,\ \ (Q\,|\,L_n) = \frac{(-1)^k}{2^n n!}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}[Q(X)]\frac{\mathrm{d}^{n-k}}{\mathrm{d}x^{n-k}}[(x^2-1)^n]\,\mathrm{d}x$$

⋆ C'est vrai pour $k=0$ puisque :

$$\frac{(-1)^0}{2^n n!}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^0}{\mathrm{d}x^0}[Q(x)]\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[(x^2-1)^n]\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{1}Q(x)L_n(x)\,\mathrm{d}x = (Q\,|\,L_n)$$

⋆ On suppose le résultat vrai au rang k. On effectue une intégration par parties avec :

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}[Q(x)] &\quad \text{et} \quad v'(x) &= \frac{\mathrm{d}^{n-k}}{\mathrm{d}x^{n-k}}[(x^2-1)^n] \\ u'(x) &= \frac{\mathrm{d}^{k+1}}{\mathrm{d}x^{k+1}}[Q(x)] & v(x) &= \frac{\mathrm{d}^{n-k-1}}{\mathrm{d}x^{n-k-1}}[(x^2-1)^n]\end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned}(Q\,|\,L_n) &= \frac{(-1)^k}{2^n n!}\left[\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}[Q(X)]\frac{\mathrm{d}^{n-k-1}}{\mathrm{d}x^{n-k-1}}[(x^2-1)^n]\right]_{-1}^{1} \\ &\quad -\frac{(-1)^k}{2^n n!}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^{k+1}}{\mathrm{d}x^{k+1}}[Q(x)]\frac{\mathrm{d}^{n-k-1}}{\mathrm{d}x^{n-k-1}}[(x^2-1)^n]\,\mathrm{d}x \\ (Q\,|\,L_n) &= \frac{(-1)^{k+1}}{2^n n!}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^{k+1}}{\mathrm{d}x^{k+1}}[Q(x)]\frac{\mathrm{d}^{n-(k+1)}}{\mathrm{d}x^{n-(k+1)}}[(x^2-1)^n]\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Le résultat est vrai au rang $k+1$.

Par récurrence, il est donc montré que :

$$\boxed{\forall k \in [\![0,n]\!]\,,\ \ (Q\,|\,L_n) = \frac{(-1)^k}{2^n n!}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}[Q(x)]\frac{\mathrm{d}^{n-k}}{\mathrm{d}x^{n-k}}[(x^2-1)^n]\,\mathrm{d}x}$$

2b. Si on choisit $Q \in E_{n-1}$ et $k = n$, on a $\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[Q(X)] = 0$ et :

$$(Q\,|\,L_n) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[Q(x)]\frac{\mathrm{d}^0}{\mathrm{d}x^0}[(x^2-1)^n]\,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\int_{-1}^{1} 0\times(x^2-1)^n\,\mathrm{d}x$$

D'où $\forall Q \in E_{n-1}$, $(Q\,|\,L_n) = 0$.

$$\boxed{\text{Pour tout } n\in\mathbb{N}^*,\ L_n \text{ est orthogonal à } E_{n-1}.}$$

2c. Soit $p, q \in \mathbb{N}$ avec $p > q$. Alors $L_q \in E_{p-1}$, donc d'après la question précédente, on a $(L_p\,|\,L_q) = 0$.

$$\boxed{\text{Les polynômes } L_p \text{ sont deux à deux orthogonaux.}}$$

3. 3a. D'après C.2a, on a pour $k = n$:

$$\begin{aligned}\|L_n\|^2 &= (L_n\,|\,L_n) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[L_n(x)]\frac{\mathrm{d}^0}{\mathrm{d}x^0}[(x^2-1)^n]\,\mathrm{d}x\\ &= (L_n\,|\,L_n) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[L_n(x)](x^2-1)^n\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Or $\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[L_n(x)] = \dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{\mathrm{d}^{2n}}{\mathrm{d}x^{2n}}[(x^2-1)^n] = \dfrac{1}{2^n n!}\times(2n)!$. D'où :

$$\|L_n\|^2 = \frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n\,\mathrm{d}x$$

c'est à dire, en notant $I_n = \displaystyle\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n\,\mathrm{d}x$:

$$\boxed{\|L_n\|^2 = \frac{(-1)^n}{2^{2n}}\binom{2n}{n}I_n}$$

3b. Effectuons, dans l'expression de I_{n+1}, l'intégration par parties ci-dessous :

$$\begin{array}{lcl} u(x) = (x^2-1)^{n+1} & \text{et} & v'(x) = 1\\ u'(x) = 2(n+1)x(x^2-1)^n & & v(x) = x\end{array}$$

$$\begin{aligned}I_{n+1} &= \int_{-1}^{1}(x^2-1)^{n+1}\,\mathrm{d}x = \left[x(x^2-1)^{n+1}\right]_{-1}^{1} - (2n+2)\int_{-1}^{1}x^2(x^2-1)^n\,\mathrm{d}x\\ &= -(2n+2)\int_{-1}^{1}\big((x^2-1)+1\big)(x^2-1)^n\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

En séparant en deux intégrales on retrouve $I_{n+1} = -(2n+2)I_{n+1} - (2n+2)I_n$, c'est à dire, en équilibrant cette égalité :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ \ I_{n+1} = -\frac{2n+2}{2n+3}I_n.}$$

3c. Grâce à cette relation de récurrence, on peut exprimer pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}I_n &= -\frac{2n}{2n+1}I_{n-1} = \frac{2n}{2n+1}\times\frac{2n-2}{2n-1}I_{n-2}\\ &= \cdots = \frac{-2n}{2n+1}\times\frac{-(2n-2)}{2n-1}\times\cdots\times\frac{-2}{3}I_0 \quad \text{avec } I_0 = 2\\ &= (-1)^n\frac{2n}{2n+1}\times\frac{2n}{2n}\times\frac{(2n-2)}{2n-1}\times\frac{2n-2}{2n-2}\times\cdots\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{2}I_0\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\quad I_n = (-1)^n\frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}}$$

Remarque : on peut aussi faire une récurrence pour démontrer plus proprement la formule, mais ceci suppose avant de conjecturer ce résultat.

3d. En utilisant le calcul trouvé à la question 3, combiné avec ce dernier résultat, on obtient :

$$\|L_n\|^2 = \frac{(-1)^n}{2^{2n}}\frac{(2n)!}{(n!)^2} \times (-1)^n \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{2}{2n+1}$$

et par passage à la racine carrée, on en déduit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \ \|L_n\| = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}.}$$

3e. On a déjà montré que la famille $(L_p)_{0\leqslant p\leqslant n}$ était une famille orthogonale de polynômes non nuls de E_n. En divisant chacun de ces polynômes par sa norme, on obtient une famille orthonormée. Il y en a $n+1 = \dim E_n$, donc il s'agit d'une base orthonormée de E_n. Avec le calcul de la question précédente, on conclut que :

$$\boxed{\left(\sqrt{\frac{2p+1}{2}}L_p\right)_{0\leqslant p\leqslant n} \quad \text{est une base orthonormée de } E_n.}$$

Partie D : Une relation de récurrence

Soit n un entier naturel non nul.

1. On peut utiliser dans cette question le résultat de la question 6. On sait que L_{n+1} est de degré $n+1$ et que son coefficient dominant est $\frac{1}{2^{n+1}}\binom{2n+2}{n+1}$, alors que L_n est de degré n et de coefficient dominant $\frac{1}{2^n}\binom{2n}{n}$. Le polynôme $(n+1)L_{n+1}(X) - (2n+1)XL_n(X)$ est donc de degré $n+1$ et son coefficient dominant (en X^{n+1}) est :

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= (n+1)\frac{1}{2^{n+1}}\binom{2n+2}{n+1} - (2n+1)\frac{1}{2^n}\binom{2n}{n} \\
&= \frac{n+1}{2^{n+1}}\frac{(2n+2)!}{\big((n+1)!\big)^2} - \frac{2n+1}{2^n}\frac{(2n)!}{(n!)^2} \\
a_{n+1} &= \frac{1}{2^{n+1}}\frac{2\times(2n+1)!}{(n!)^2} - \frac{1}{2^n}\frac{(2n+1)!}{(n!)^2} = 0
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Le coefficient de } X^{n+1} \text{ dans } (n+1)L_{n+1}(X) - (2n+1)XL_n(X) \text{ est nul.}}$$

2. D'après la question précédente, le polynôme $(n+1)L_{n+1}(X) - (2n+1)XL_n(X)$ est un élement de E_n. Or on a vu à la partie C que la famille $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ est une famille (orthogonale) de $n+1$ polynômes de E_n, donc une base de E_n. Autrement dit,

$$\boxed{\begin{gathered}\text{Il existe un unique } (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \text{ tel que} \\ (n+1)L_{n+1}(X) - (2n+1)XL_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k L_k(X).\end{gathered}}$$

3. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. À partir de la dernière relation et par linéarité du produit scalaire, on trouve :

$$(n+1)(L_{n+1} \,|\, L_k) - (2n+1)(XL_n \,|\, L_k) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i (L_i \,|\, L_k).$$

Rappelons qu'on a montré en C1c. que la famille $(L_1, L_2, \ldots, L_p)$ était orthogonale, ce qui entraîne $(L_{n+1} \,|\, L_k) = 0$ et $(L_i \,|\, L_k) = 0$ pour $i \neq k$. Il reste ainsi :

$$-(2n+1)(XL_n \,|\, L_k) = \alpha_k (L_k \,|\, L_k) = \alpha \|L_k\|^2.$$

Soit, en isolant le coefficient α_k :

$$\boxed{\forall k \in [\![0, n]\!],\ \alpha_k = -(2n+1)\frac{(XL_n \,|\, L_k)}{\|L_k\|^2}.}$$

4. Pour tout $k \in [\![0, n-2]\!]$, on a simplement :

$$(XL_n \,|\, L_k) = \int_{-1}^{1} \big(xL_n(x)\big)L_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} L_n(x)\big(xL_k(x)\big)\,\mathrm{d}x = (L_n \,|\, XL_k)$$

Constatons que $XL_k \in E_{n-1}$. Or on sait que L_n est orthogonal à E_{n-1}, donc $(L_n \mid XL_k) = 0$. Avec l'expression trouvée en 3, on en déduit que :

$$\boxed{\forall k \in [\![0, n-2]\!], \quad \alpha_k = 0.}$$

5. Pour $k = n$:

$$(XL_n \mid L_n) = \int_{-1}^{1} x L_n^2(x)\,\mathrm{d}x$$

On a vu à la question 4 que L_n était de la parité de n, d'où :

$$(-x)L_n^2(-x) = -x\big(-L_n(x)\big)^2 = -xL_n^2(x)$$

La fonction $x \mapsto xL_n^2(x)$ est impaire donc son intégrale entre -1 et 1 est nulle.
Ainsi $(XL_n \mid L_n) = 0$. Autrement dit :

$$\boxed{\alpha_n = 0}$$

6. En éliminant les termes nuls, réécrivons la relation de la question 2 :

$$(n+1)L_{n+1}(X) - (2n+1)XL_n(X) = \alpha_{n-1}L_{n-1}(X).$$

On évalue cette expression en 1 :

$$(n+1)L_{n+1}(1) - (2n+1)L_n(1) = \alpha_{n-1}L_{n-1}(1).$$

en utilisant le fait que, d'après la question B2, $L_{n+1}(1) = L_n(1) = L_{n-1}(1) = 1$:

$$(n+1) - (2n+1) = \alpha_{n-1}.$$

$$\boxed{\alpha_{n-1} = -n}$$

7. Par report de ce dernier calcul, la relation de la question 2 devient :

$$(n+1)L_{n+1}(X) - (2n+1)XL_n(X) = -nL_{n-1}(X).$$

On en déduit enfin que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (n+1)L_{n+1}(X) - (2n+1)XL_n(X) + nL_{n-1}(X) = 0.}$$
