Calculs d'intégrales

Primitivation ou intégration des fractions rationnelles

Exercice 1

On pose $I_n = \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}$.

1. Préciser la valeur de I_1. Calculer I_2 et I_3 (on pourra poser $t = \tan u$).
2. Pour $n \geqslant 4$, vérifier qu'on a :

$$2nI_{n+1} = \frac{x}{(1+x^2)^n} + (2n-1)I_n$$

[ci001]

Décomposition en éléments simples : Donnons maintenant quelques principes de la décomposition en éléments simples des fractions rationnelles, qui n'est pas officiellement au programme mais dont la connaissance peut se révéler indispensable pour les calculs d'intégrales :

- Une fraction rationnelle est une fonction du type $x \mapsto \frac{A(x)}{B(x)}$, où A et B sont des polynômes.
- En principe, le degré de A est strictement inférieur au degré de B : sinon, on effectue la division euclidienne de A par B : $A = BQ + R$, $\deg R < \deg B$; on a alors :

$$\frac{A(x)}{B(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{B(x)}$$

  Q s'appelle la partie entière de la fraction rationnelle initiale.
- Cela étant, la fraction rationnelle $\frac{R(x)}{B(x)}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire de fractions rationnelles du type $\frac{1}{(x+\alpha)^n}$ (éléments simples de première espèce, α pouvant éventuellement être complexe), ou du type $\frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}$ (éléments simples de deuxième espèce, dans lesquels le trinôme du dénominateur n'est pas factorisable dans $\mathbb{R}$). Par exemple :

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}$$

- L'intégration des éléments simples de première espèce est sans difficulté, sauf peut-être un calcul du genre $\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t+\alpha}$, avec $\alpha \in \mathbb{C}$, qui ferait intervenir un logarithme complexe. Mais dans ce cas, on se ramène à un élément simple de deuxième espèce, en multipliant en haut et en bas par $t + \overline{\alpha}$.
- Il reste donc à savoir calculer :

$$\int \frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x, \quad a,b,p,q \in \mathbb{R}, \quad p^2 - 4q < 0$$

  On fait apparaître au numérateur la dérivée de x^2+px+q, en écrivant :

$$ax + b = \frac{a}{2}(2x+p) + b - \frac{ap}{2}$$

  - $\displaystyle\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x$ est de la forme $\displaystyle\int \frac{u'(x)}{(u(x))^n}\,\mathrm{d}x$.
  - Pour $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+px+q)^n}$, on met le trinôme sous forme canonique :

$$x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \beta^2$$

    Alors : $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+px+q)^n} = \frac{1}{\beta^{2n}} \int \frac{\mathrm{d}x}{\left[1+\left(\frac{2x+p}{2\beta}\right)^2\right]^n}$.

    Par changement de variable, on est amené à : $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}$.

Exercice 2

Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x$. [ci015]

Exercice 3

Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{3x+1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$. [ci016]

Exercice 4

Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t+1+i}$. [ci017]

Exercice 5

Trouver les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x(x^3+1)}$. [ci018]

Primitivation ou intégration des polynômes en $\sin x$ et $\cos x$

Le problème se ramène à primitiver ou intégrer des monômes du type $(\sin x)^p(\cos x)^q$.

- Si p et q sont de parités différentes, on fait un changement de variable : $\cos x = u$ ou $\sin x = u$. Par exemple :

$$\int_0^{\pi/2} (\sin x)^{2p}(\cos x)^{2q+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 u^{2p}(1-u^2)^q\,\mathrm{d}u$$

- Si p et q sont impairs, on peut linéariser ou poser $\cos 2x = u$:

$$\int (\sin x)^{2p+1}(\cos x)^{2q+1}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{4} \times \int \left(\frac{1-u}{2}\right)^p \left(\frac{1+u}{2}\right)^q \mathrm{d}u$$

- Si p et q sont pairs, on linéarise.

Exercice 6

Calculer $I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 x \sin^3 x\,\mathrm{d}x,\ ,\ I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 x \sin^2 x\,\mathrm{d}x,$ et $I_3 = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \sin^3 x\,\mathrm{d}x$. [ci019]

Primitivation ou intégration des fractions rationnelles en $\sin x$ et $\cos x$

Règles de Bioche : si l'élément différentiel (i.e. : tout ce qui est sous le signe $\int$, y-compris le "$\mathrm{d}x$") est invariant quand on remplace x par $-x$, on pose $\cos x = t$; si l'élément différentiel est invariant quand on remplace x par $\pi - x$, on pose $\sin x = t$; si l'élément différentiel est invariant quand on remplace x par $\pi + x$, on pose $\tan x = t$. Attention toutefois à l'intervalle, les changements de variables doivent être valides.

Si aucune de ces invariances n'a lieu, on pose $\tan \frac{x}{2} = t$ ($\mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$).

Exercice 7

Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin 2t}{1+\cos t}\,\mathrm{d}t$. [ci020]

Exercice 8

Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x}$. [ci021]

Exercice 9

Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\sin t+\cos t}\,\mathrm{d}t$. [ci022]

Primitivation ou intégration des polynômes et fractions rationnelles en e^x.

Sauf astuce, on pose $e^x = u$.

Exercice 10

Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\ln 3}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{e^x+e^{-x}}$. [ci023]

Primitivation ou intégration des fractions rationnelles en x et $\sqrt{ax^2+bx+c}$ $\quad(a<0)$

Mettre ax^2+bx+c sous forme canonique, puis par un changement de variable, ramener le radical à la forme : $\sqrt{1-t^2}$. Faire alors un nouveau changement de variable trigonométrique pour faire disparaître le radical.

Exercice 11

Calculer $\displaystyle\int_{3/2}^{5/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-x^2+4x-3}}$. [ci024]

Exercice 12

Calculer les primitives de $x \mapsto \dfrac{1}{(4x-x^2)^{\frac{3}{2}}}$ [ci025]

Primitivation ou intégration des fractions rationnelles en x et $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$

On pose $y = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$. On est alors ramené à une fraction rationnelle en y.

Exercice 13

Calculer : $\displaystyle\int_2^4 \frac{\mathrm{d}x}{x-1+\sqrt{x-1}}$. [ci026]

Exercice 14

Calculer les primitives de : $x \mapsto \dfrac{1}{2x-1}\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\,\mathrm{d}x$. [ci027]
