Espaces probabilisés

Exercice 1

Par convention, on admet que l'information après 0 transmissions est correcte, c'est à dire $p_0 = 1$. Une information est transmise à l'intérieur d'une population. Avec la probabilité p, c'est l'information correcte qui est transmise à chaque étape d'une personne à une autre. Avec la probabilité $1 - p$, c'est l'information contraire qui est transmise. On note p_n la probabilité que l'information après n transmissions soit correcte.

1. Montrer qu'on a la relation de récurrence :

$$p_{n+1} = (2p - 1)p_n + (1 - p)$$

2. Si la suite (p_n) converge, quelle est sa limite ℓ ?
3. On pose $u_n = p_n - \ell$. Vérifier que la suite (u_n) est géométrique et préciser la valeur de u_n en fonction de p et de n.
4. En déduire la valeur de p_n en fonction de p et de n.
5. En déduire la limite de la suite p_n. Qu'en pensez-vous ?

Correction ▼ [pr009]

Exercice 2

Un individu est choisi au hasard dans une population comprenant 60 personnes honnêtes et 40 tricheurs. On lui fait tirer une carte d'un jeu de 52 cartes. Si c'est un tricheur, il retourne toujours un as.

1. Quelle est la probabilité que l'individu choisi retourne un as ?
2. Un individu a retourné un as. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'un tricheur ?
3. Un individu a retourné deux fois de suite un as. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'un tricheur ?

Correction ▼ [pr038]

Exercice 3

Un distributeur de cafés A fonctionne correctement un jour sur deux (en moyenne). Un autre distributeur de cafés B fonctionne deux jours sur trois.

Le jour n°1, une personne choisit au hasard un des distributeurs A, B. Il décide d'utiliser le même distributeur le lendemain si celui-ci lui a donné un café correct, et de changer de distributeur sinon. Il procède de même les jours suivants.

On considère les évènements suivants ($n \in \mathbb{N}^*$) :

$$\begin{aligned} A_n &= \{\text{Le jour n, la personne utilise le distributeur } A\} \\ B_n &= \{\text{Le jour n, la personne utilise le distributeur } B\} \\ C_n &= \{\text{Le jour n, la personne boit un café correct}\} \end{aligned}$$

On note $p_n = P(A_n)$ et $q_n = P(C_n)$.

1. Trouver une relation entre p_{n+1} et p_n. Quelle est la nature de de la suite (p_n) ?
2. En déduire p_n en fonction de n.
3. Exprimer q_n en fonction de p_n. En déduire la probabilité de boire un café correct le jour n.

Correction ▼ [pr041]

Exercice 4

1. Montrer que, pour tout $n \in N^*$, on a $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{i}{i+j} = \frac{n^2}{2}$. On pourra remarquer que $\dfrac{i}{i+j} = \dfrac{i+j-j}{i+j}$.

2. On tire au hasard, successivement et avec remise, deux jetons d'un lot de n jetons numérotés de 1 à n. Notons (r, s) le couple de nombres tirés. On tire alors, au hasard, une boule d'une urne contenant r boules vertes et s boules rouges. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule verte ? Était-ce prévisible

Correction ▼ [pr066]

Exercice 5

Trois candidats passent un oral de mathématiques. Le premier candidat tire un exercice parmi les 10 possibles, le second parmi les 9 restants, et le troisième parmi les 8 restants. Il y a 3 exercices infaisables parmi les 10. Vaut-il mieux passer en premier, en deuxième ou en troisième ?

Correction ▼ [pr067]

Correction des exercices :

Correction de l'exercice 1 ▲

On note l'événement suivant :

$$A_n = \text{« L'information après } n \text{ transmissions est correcte. »}$$

1. D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} p_{n+1} = P(A_{n+1}) &= P(A_{n+1}|A_n) \times P(A_n) + P(A_{n+1}|\overline{A_n}) \times P(\overline{A_n}) \\ &= p \times p_n + (1-p) \times (1-p_n) \end{aligned}$$

Après simplification, on trouve bien la relation de récurrence :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_{n+1} = (2p-1)p_n + (1-p)}$$

2. On suppose que la suite (p_n) converge vers une limite ℓ. Par passage à la limite dans la relation de récurrence, on trouve :

$$\ell = (2p-1)\ell + (1-p) \quad \text{soit : } \ell = \frac{1}{2}$$

On conclut :

$$\boxed{\text{Si la suite } (p_n) \text{ converge, alors sa limite est } 1/2.}$$

3. On pose $u_n = p_n - \dfrac{1}{2}$. On calcule :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= p_{n+1} - \frac{1}{2} = (2p-1)p_n + \frac{1}{2} - p \\ &= (2p-1)\left(u_n + (\frac{1}{2}\right) \\ u_{n+1} &= (2p-1)u_n \end{aligned}$$

La suite (u_n) est donc géométrique et on conclut :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (2p-1)^n u_0 = \frac{1}{2}(2p-1)^n}$$

4. Il vient immédiatement :

$$\boxed{p_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p-1)^n}$$

5. On distingue trois cas de figure :
   — Si $p = 1$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $p_n = 1$ ce qui est logique car l'information est toujours transmise correctement.
   — Si $p = 0$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $p_n = \dfrac{1+(-1)^n}{2} = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$ ce qui est logique car l'information est toujours transmise correctement une fois sur deux.
   — Si $0 < p < 1$, alors $-1 < 2p-1 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = \dfrac{1}{2}$.
   Il n'est plus possible de prévoir si l'information est vrai ou fausse au bout d'un grand nombre de transmissions !

Correction de l'exercice 2 ▲

On introduit les événements suivants :

$$A = \text{« L'individu tire un as. »} \quad \text{et} \quad B := \text{« L'individu est un tricheur. »}$$

Les données de l'énoncé peuvent se traduire de la manière suivante :

$$P(T) = \frac{40}{100} = \frac{2}{5} \;\; ; \;\; P(A|\overline{T}) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13} \;\; ; \;\; P(A|T) = 1$$

En effet, il y a 40 personnes sur 100 qui sont des tricheurs. Si la personne n'est pas un tricheur, il y a 4 possibilités sur 52 de tirer un as en supposant l'équiprobabilité du tirage. Enfin, si la personne est un tricheur, l'évènement tirer un as est l'évènement certain.

1. On applique ici la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|T) \times P(T) + P(A|\overline{T}) \times P(\overline{T}) \\ &= \frac{2}{5} + \frac{1}{13} \times \frac{3}{5} \end{aligned}$$

$$\boxed{P(A) = \frac{29}{65} \simeq 0,446}$$

2. On cherche la probabilité que l'individu soit un tricheur sachant qu'il retourne un as. On peut utiliser la formule de Bayes :

$$P(T|A) = \frac{P(A|T) \times P(T)}{P(A)} = \frac{P(T)}{P(A)} = \frac{65}{29} \times \frac{40}{100}$$

On en conclut que :

$$\boxed{P(T|A) = \frac{26}{29} \simeq 0,8966}$$

3. Ici, il y a deux pioches successives (avec remise). On introduit l'événement :

$$A' = \text{« L'individu tire deux as. »}$$

Toujours en utilisant la formule de Bayes, on a :

$$P(T|A') = \frac{P(A'|T) \times P(T)}{P(A')} = \frac{P(T)}{P(A')}$$

En effet, on peut supposer que si la personne est un tricheur, l'évènement « retourner deux fois de suite un as »est l'évènement certain. Il reste à calculer la probabilité de retourner effectivement deux fois de suite un as (on suppose implicitement qu'il y a remise). D'après la formule des probabilités totales :

$$P(A') = P(A'|T) \times P(T) + P(A'|\overline{T}) \times P(\overline{T}) = P(T) + \frac{1}{13^2} \times (1 - P(T)) = \frac{2}{5} + \frac{1}{13^2} \times \frac{3}{5} = \frac{341}{845}$$

D'où :

$$\boxed{P(T|A') = \frac{338}{341} \simeq 0,9912}$$

Si un individu a retourné deux fois de suite un as, la probabilité qu'il s'agisse d'un tricheur est de $99,12\%$.

Correction de l'exercice 3 ▲

1. Remarquons que $B_n = \overline{A_n}$. On utilise la formule des probabilités totales sur le système complet (A_n, B_n) :

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= P(A_{n+1}) = P(A_{n+1}|A_n) \times P(A_n) + P(A_{n+1}|B_n) \times P(B_n) \\ &= \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{3} \times (1 - p_n) \end{aligned}$$

$$\boxed{p_{n+1} = \frac{1}{6}p_n + \frac{1}{3}}$$

La suite (p_n) est une suite arithmético-géométrique.

2. La méthode qui suit peut-être employée pour toute suite de ce type :
   - ⋆ On cherche une limite éventuelle ℓ de la suite (p_n). Par passage à la limite dans la relation de récurrence, on trouve :

   $$\ell = \frac{1}{6}\ell + \frac{1}{3} \quad \text{donc :} \quad \ell = \frac{1}{3} \times \frac{6}{5} = \frac{2}{5}$$

   - ⋆ Pour $n \geqslant 1$, on pose $u_n = p_n - \ell$. La suite (v_n) est géométrique car :

   $$\begin{aligned} p_{n+1} &= \frac{1}{6}p_n + \frac{1}{3} \\ \ell &= \frac{1}{6}\ell + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

   En effectuant la différence, on a immédiatement $p_{n+1} - \ell = \frac{1}{6}(p_n - \ell)$, d'où :

   $$\boxed{u_{n+1} = \frac{1}{6}u_n}$$

On sait alors que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n = \dfrac{1}{6^{n-1}} u_1$, et on en déduit :

$$p_n = \ell + \frac{1}{6^{n-1}}(p_1 - \ell) = \frac{2}{5} + \frac{1}{6^{n-1}}\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{5}\right)$$

$$\boxed{p_n = \frac{2}{5} + \frac{1}{10 \times 6^{n-1}}}$$

3. B_n étant l'événement contraire de A_n, on en déduit :

$$q_n = 1 - p_n = \frac{3}{5} - \frac{1}{10 \times 6^{n-1}}$$

Enfin, en utilisant la formule des probabilités totales appliquée au système complet (A_n, B_n), on a :

$$\begin{aligned} P(C_n) &= P(C_n|A_n) \times P(A_n) + P(C_n|B_n) \times P(B_n) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5} + \frac{1}{10 \times 6^{n-1}}\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{3}{5} - \frac{1}{10 \times 6^{n-1}}\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{P(C_n) = \frac{3}{5} - \frac{1}{10 \times 6^{n}}}$$

Correction de l'exercice 4 ▲

1. On note $S = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{i}{i+j}$. Remarquons que :

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(1 - \frac{j}{i+j}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} 1 - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{j}{i+j} = n^2 - S \end{aligned}$$

En effet $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{j}{i+j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{j}{i+j} = S$. On a ainsi $2S = n^2$, d'où $S = \dfrac{n^2}{2}$.

2. On introduit les événements suivants :

$$\begin{aligned} A_{r,s} &= \text{« Piocher les jetons numérotés } r \text{ au premier tirage et } s \text{ au second tirage »} \\ V &= \text{« Obtenir une boule verte au tirage »} \end{aligned}$$

Avec la formule des probabilités totales, on a :

$$P(V) = \sum_{(r,s)\in[\![1,n]\!]^2} P(V|A_{r,s}) \times P(A_{r,s}) = \sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\frac{r}{r+s} \times P(A_{r,s})$$

Comme les jetons sont tirés avec remise, les événements « tirer le jeton r au premier tirage »et « tirer le jeton s au second tirage »sont deux événements indépendants de même probabilité $\dfrac{1}{n}$ d'où $P(A_{r,s}) = \dfrac{1}{n^2}$. Enfin :

$$P(V) = \sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\frac{r}{r+s} \times \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2}\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\frac{r}{r+s}$$

On conclut avec le résultat de la question 1 :

$$\boxed{P(V) = \frac{1}{2}}$$

Résultat prévisible car les rôles des boules vertes et des boules rouges sont permutables.

Correction de l'exercice 5 ▲

On introduit les événements suivants pour $1 \leqslant i \leqslant 3$:

$$A_i = \text{« Le i-ème candidat tire un exercice infaisable »}$$

Le premier candidat a trois possibilités sur dix de piocher un exercice infaisable . La pioche du deuxième candidat dépend de celle du premier, et la pioche du deuxième candidat dépend de celle des deux premiers. Plus précisément, on peut appliquer la formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcl}
P(A_1) & = & \dfrac{3}{10} \\
P(A_2) & = & P(A_2|A_1) \times P(A_1) + P(A_2|\overline{A_1}) \times P(\overline{A_1}) \\
 & = & \dfrac{2}{9} \times \dfrac{3}{10} + \dfrac{3}{9} \times \dfrac{7}{10} \\
P(A_2) & = & \dfrac{3}{10} \\
P(A_3) & = & P(A_3|A_1 \cap A_2) \times P(A_1 \cap A_2) + P(A_3|\overline{A_1} \cap A_2) \times P(\overline{A_1} \cap A_2) + P(A_3|A_1 \cap \overline{A_2}) \times P(A_1 \cap \overline{A_2}) \\
 & & +P(A_3|\overline{A_1} \cap \overline{A_2}) \times P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2}) \\
 & = & P(A_3|A_1 \cap A_2) \times P(A_2|A_1) \times P(A_1) + P(A_3|\overline{A_1} \cap A_2) \times P(A_2|\overline{A_1}) \times P(\overline{A_1}) \\
 & & +P(A_3|A_1 \cap \overline{A_2}) \times P(\overline{A_2}|A_1) \times P(A_1) + P(A_3|\overline{A_1} \cap \overline{A_2}) \times P(\overline{A_2}|\overline{A_1}) \times P(\overline{A_1}) \\
 & = & \dfrac{1}{8} \times \dfrac{2}{9} \times \dfrac{3}{10} + \dfrac{2}{8} \times \dfrac{3}{9} \times \dfrac{7}{10} + \dfrac{2}{8} \times \dfrac{7}{9} \times \dfrac{3}{10} + \dfrac{3}{8} \times \dfrac{6}{9} \times \dfrac{7}{10} \\
 & = & \dfrac{1}{120} + \dfrac{7}{120} + \dfrac{7}{120} + \dfrac{21}{120} = \dfrac{36}{120} \\
P(A_3) & = & \dfrac{3}{10}
\end{array}$$

$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3)$ donc l'ordre de passage ne change pas la probabilité de tomber sur un exercice infaisable.