Lycée Jean Perrin
Classe de TSI$_2$

Sujets : Intégrale généralisée.

Énoncés des sujets :

Exercice 1

On admet que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$, et on se propose de calculer $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer l'existence de cette intégrale.
2. Pour $k \in \mathbb{N}$, montrer que $I_k = \displaystyle\int_0^1 t^k \ln(t)\,\mathrm{d}t$ converge et effectuer le calcul de I_k.
3. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} I_k = \int_0^1 \frac{t^{n+1}\ln(t)}{t-1}\,\mathrm{d}t - I$.
4. Calculer la limite de $\dfrac{t\ln(t)}{t-1}$ lorsque t tend vers 0 et lorsque t tend vers 1. En déduire qu'il existe une constante $M > 0$, qu'on ne cherchera pas à calculer, telle que pour tout $t \in]0,1[$, $\left|\dfrac{t\ln(t)}{t-1}\right| \leqslant M$.
5. En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^{n+1}\ln(t)}{t-1}\,\mathrm{d}t = 0$, puis que : $I = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2}$.

   Conclure.

Correction ▼ [ig1]

Exercice 2

Partie I : Étude d'une fonction définie par une intégrale

1. Montrer que pour tout $x > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t$ converge.

   On note $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in]0,+\infty[$, par : $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t$.
2. Montrer : $\forall x \in]0,+\infty[,\ f(x) \geqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-1}}{x+t}\,\mathrm{d}t$. En déduire $f(x) \underset{x\to 0+}{\longrightarrow} +\infty$.
3. Montrer : $\forall x \in]0,+\infty[,\ 0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{x}$. En déduire $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
4. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge et que :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad \left|f(x) - \frac{1}{x}\right| \leqslant \frac{1}{x^2}\int_0^{+\infty} te^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

   En déduire : $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$.

Partie II : Une autre expression intégrale de f.

A - Dérivabilité et expression de la dérivée de f sous forme d'une intégrale

5. Soit $(x,h) \in]0,+\infty[\times \mathbb{R}^*$ tel que $h \geqslant -\dfrac{x}{2}$.
   (a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t$ converge.
   (b) Établir : $\forall t \in [0,+\infty[,\ \left|\dfrac{1}{h}\left(\dfrac{1}{x+h+t} - \dfrac{1}{x+t}\right) + \dfrac{1}{(x+t)^2}\right| \leqslant \dfrac{2|h|}{x^3}$.
   (c) En déduire : $\left|\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} + \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \dfrac{2|h|}{x^3}$.

6. En déduire que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que : $\forall x \in]0,+\infty[$, $f'(x) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t$.
7. Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$ et tout $(\varepsilon, A) \in]0,1] \times [1,+\infty[$:
$$\int_\varepsilon^A \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{e^{-A}}{x+A} + \frac{e^{-\varepsilon}}{x+\varepsilon} - \int_\varepsilon^A \frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t.$$
8. En déduire : $\forall x \in]0,+\infty[,\ \ f'(x) = -\dfrac{1}{x} + f(x)$.
9. Montrer que f que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$ et que $\forall x \in]0,+\infty[,\ \ f''(x) = \dfrac{1}{x^2} + f'(x)$.

B - Intervention d'une fonction auxiliaire g

On note $g :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x > 0$, par : $g(x) = e^{-x} f(x)$.

10. Démontrer que g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que : $\forall x \in]0,+\infty[,\ \ g'(x) = -\dfrac{e^{-x}}{x}$.
11. Montrer que, pour tout $x \in]0,+\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u$ converge et que :
$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad g(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u,$$
puis : $\forall x \in]0,+\infty[, \quad f(x) = e^x \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u$.
12. Montrer que $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x}$.

Correction ▼ [ig2]

Exercice 3

Soient a et b deux réels avec $0 < a < b$.

1. Justifier la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\,\mathrm{d}t$.
2. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < x < y$. Démontrer que :
$$\int_x^y \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{ax}^{bx} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t - \int_{ay}^{by} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t.$$
3. Démontrer que, pour tout réel $z > 0$,
$$e^{-bz} \ln\frac{b}{a} \leqslant \int_{az}^{bz} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant e^{-az} \ln\frac{b}{a}.$$
4. En déduire que
$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\,\mathrm{d}t = \ln\frac{b}{a}.$$

Correction ▼ [ig3]

Exercice 4

1. Montrer la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{(t+2)(t^2+1)}\,\mathrm{d}t$, et calculer cette intégrale.
2. En déduire le calcul de $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin u}{2\cos u + \sin u}\,\mathrm{d}u$.
   On pourra effectuer, en le justifiant, le changement de variable $t = \tan u$.

Correction ▼ [ig4]

Exercice 5

On pose $B(u,v) = \int_0^1 t^{u-1}(1-t)^{v-1}\,\mathrm{d}t$.

1. Pour quelles valeurs de $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ cette intégrale est-elle définie ? On note D l'ensemble de ces valeurs.
2. Calculer $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.
3. Prouver que $\forall (u,v) \in D, \quad B(u,v) = B(v,u)$.
4. Prouver que $\forall (u,v) \in D, \quad B(u,v) = B(u+1,v) + B(u,v+1)$.
5. Au moyen d'une intégration par parties, prouver que :
$$\forall (u,v) \in D, \quad B(u+1,v) = \frac{u}{u+v} B(u,v)$$
6. En déduire l'expression de $B(n+1,p)$ en fonction de $B(1,p)$ pour $(n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$.
On pourra conjecturer le résultat et le montrer par récurrence sur n.
7. Calculer $B(n,p)$ pour $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

Correction ▼ [ig5]

Exercice 6

1. Soit a un réel strictement compris entre 0 et 1.
   (a) Établir que $\ln\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to 1}{\sim} 1-x$ (on pourra poser $u = 1-x$).
   (b) Montrer que pour tout réel p, et pour tout réel q strictement supérieur à -1, l'intégrale $\int_a^1 x^p \left(\ln \frac{1}{x}\right)^q \mathrm{d}x$ est convergente.
2. (a) Soit α un réel strictement positif et r un réel quelconque. Rappeler la valeur $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^r}{x^\alpha}$.
   (b) On suppose encore $0 < a < 1$. Montrer que pour tout réel r, et pour tout réel s strictement supérieur à 1, l'intégrale $\int_{\frac{1}{a}}^{+\infty} \frac{(\ln x)^r}{x^s}\,\mathrm{d}x$ est convergente.
   Indication : poser $s = 1 + 2\alpha$ et montrer que $\frac{(\ln x)^r}{x^s} = o\left(\frac{1}{x^{1+\alpha}}\right)$ au voisinage de $+\infty$.
3. Déduire des questions précédentes que pour tout réel p et pour tout réel q tous deux strictement supérieurs à -1, l'intégrale $I(p,q) = \int_0^1 x^p \left(\ln \frac{1}{x}\right)^q \mathrm{d}x$ est convergente.
4. Montrer que pour tout réel p et pour tout réel q, tous deux strictement supérieurs à -1, l'on a :
   (a) $I(p,q) = \int_0^{+\infty} e^{-(p+1)x} x^q \,\mathrm{d}x$.
   (b) $I(p,q) = \frac{1}{(p+1)^{q+1}} I(0,q)$.
5. (a) Montrer que pour tout réel q strictement positif, $I(0,q) = qI(0,q-1)$.
   (b) En déduire $I(p,q)$ pour p réel strictement supérieur à -1 et pour tout entier q *positif ou nul*.

Correction ▼ [ig6]

Exercice 7

Dans ce problème, on donne les intégrales :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+x)} \quad ; \quad J = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x \quad ; \quad K = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\ln(x)}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$$

1. Étude de l'intégrale I :

(a) Montrer la convergence de I.

(b) Calculer I (on pourra utiliser, en le justifiant, le changement de variable $u = \sqrt{x}$).

2. Étude de l'intégrale J :

   (a) Montrer que $\dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}(1+x)} \underset{x\to 0}{=} o\left(\dfrac{1}{x^{3/4}}\right)$.

   En déduire la convergence de l'intégrale $J_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx$.

   (b) Par une méthode analogue, montrer la convergence de l'intégrale $J_2 = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx$.

   En déduire la nature de J.

   (c) À l'aide du changement de variable $u = \frac{1}{x}$, que l'on justifiera, prouver que $J_1 = -J_2$, et en déduire la valeur de J.

3. Étude de l'intégrale K :

   (a) Calculer les limites en 0 et en $+\infty$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{\sqrt{x}\ln(x)}{1+x}$. On admet la convergence de l'intégrale K.

   (b) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $K = \dfrac{1}{2}J + I$. En déduire la valeur de K.

Correction ▼ [ig7]

Exercice 8

Le but de l'exercice est de calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$.

1. Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\mathrm{d}t$ est convergente.

2. En utilisant une intégration par parties et le changement de variable $t \mapsto u = 2t$, montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{2\sin(t)\cos(t)}{t}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t\ .$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(nt)}{t^2}\mathrm{d}t$$

   En utilisant le changement de variables $t \mapsto u = nt$, montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{I_n}{n} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t\ .$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$A_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(nt)}{\sin^2(t)}\mathrm{d}t\ .$$

   Calculer A_0 et A_1.

5. (a) Montrer la relation pour tout $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\sin(a+b)\sin(a-b) = \sin^2 a - \sin^2 b$$

   (b) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sin^2(nt) - 2\sin^2((n+1)t) + \sin^2((n+2)t) = 2\sin^2(t)\cos(2(n+1)t)\ .$$

   En déduire que $A_n - 2A_{n+1} + A_{n+2} = 0$.

6. Déduire des deux questions précédentes que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = n\dfrac{\pi}{2}$.

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$B_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(nt)}{\tan^2(t)}\mathrm{d}t\ .$$

   Montrer que $A_n - B_n = \dfrac{\pi}{4}$.

8. (a) Montrer que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, on a : $\sin(x) \leqslant x \leqslant \tan(x)$.
   (b) En déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad B_n \leqslant I_n \leqslant A_n.$$
9. Déduire de ce qui précède que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$.

Correction ▼ [ig8]

Exercice 9

Le but de l'exercice est l'étude de la fonction f définie par la formule suivante :
$$f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-2t}\sqrt{1 + x^2e^{2t}}\,\mathrm{d}t$$

1. **Domaine de définition de f :**
   (a) Justifier que pour tout réel $a > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-at}\,\mathrm{d}t$ est convergente et donner sa valeur.
   (b) Soit x un réel fixé. Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-2t}\sqrt{1 + x^2e^{2t}}\,\mathrm{d}t$.
   (c) Déterminer l'ensemble de définition de f, et expliquer pourquoi on peut se contenter d'étudier f sur $\mathbb{R}_+$.
2. **Branche infinie de la courbe représentative de f :**
   (a) Démontrer les deux encadrements suivants :
      i. $\forall x > 0, \forall t \geqslant 0, \quad xe^t \leqslant \sqrt{1 + x^2e^{2t}} \leqslant xe^t + \dfrac{e^{-t}}{2x}$
      ii. $\forall x > 0,\ x \leqslant f(x) \leqslant x + \dfrac{1}{6x}$.
   (b) Préciser alors la nature de la branche infinie de la courbe représentative de f au voisinage de $+\infty$.
3. **Dérivabilité et monotonie de f :**
   (a) Montrer que si g est une fonction continue sur $]0, +\infty[$ telle que $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ existe, alors la fonction :
$$H : x \mapsto \int_x^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$$
   est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, et $H'(x) = -g(x)$.
   (b) Soit $x > 0$. À l'aide d'un changement de variable que l'on détaillera, démontrer que :
$$f(x) = x^2 \int_x^{+\infty} \frac{\sqrt{1 + u^2}}{u^3}\,\mathrm{d}u$$
   (c) Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$ et calculer sa dérivée (on exprimera cette dérivée à l'aide de f et de fonctions usuelles).
   (d) Justifier, pour tout réel x strictement positif, l'égalité suivante :
$$2f(x) = \sqrt{1 + x^2} + x^2 \int_x^{+\infty} \frac{1}{u\sqrt{1 + u^2}}\,\mathrm{d}u$$
   (e) En déduire la monotonie de f sur $]0, +\infty[$.
4. **Étude locale de f et f' en 0 :**
   (a) Justifier que la formule suivante est valable pour tout réel x strictement positif :
$$\int_x^{+\infty} \frac{1}{u\sqrt{1 + u^2}}\,\mathrm{d}u = -\frac{\ln x}{\sqrt{1 + x^2}} + \int_x^{+\infty} \frac{u \ln u}{(1 + u^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}u$$
   et que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u \ln u}{(1 + u^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}u$ est convergente.

(b) À l'aide des questions précédentes, démontrer que l'on a :

$$f'(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -x\ln x \qquad \text{et} \qquad f(x) - \frac{1}{2} \underset{x\to 0^+}{\sim} -\frac{x^2\ln x}{2}$$

(c) En déduire que f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ et préciser la valeur de $f'(0)$.

(d) Tracer l'allure de la courbe représentative de f sur $\mathbb{R}$.

Correction ▼ [ig9]

Exercice 10

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^n(x+1)}$.

1. Vérifier que I_n est une intégrale convergente.
2. (a) Déterminer les réels a et b tels que, pour tout x différent de -1 et 0, on ait :

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} - \frac{b}{x+1}$$

   (b) En déduire la valeur de I_1.
3. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a :

$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{2(n-1)}$$

   (b) En déduire l'existence et la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.
4. (a) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, calculer $I_n + I_{n+1}$.
   (b) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
   (c) En déduire un équivalent de I_n puis donner la nature de la série de terme général I_n.
5. Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $J_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^n(x+1)^2}$.
   (a) Montrer que J_n est une intégrale convergente.
   (b) Calculer J_0.
6. (a) Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, exprimer $J_k + J_{k-1}$ en fonction de I_k.
   (b) Déterminer alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'expression de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}I_k$ en fonction de J_n.
   (c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $0 \leqslant J_n \leqslant \dfrac{1}{4(n-1)}$. Donner la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n$.
   (d) En déduire que la série de terme général $(-1)^{n-1}I_n$ est convergente et donner sa somme.

Correction ▼ [ig10]

Exercice 11

Pour α réel et n entier strictement positif, on considère les intégrales généralisées :

$$I_{n,\alpha} = \int_0^{+\infty} \frac{(\sin t)^n}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$$

Une intégrale généralisée est dite semi-convergente si elle est convergente mais non absolument convergente.

Partie I : cas $n = 1$.

On étudie dans cette partie la convergence de $I_{1,\alpha} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$.

1. Étudier, suivant les valeurs de α, la convergence de $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$.
2. On suppose *dans cette question* que $\alpha > 1$.

2.a Étudier la convergence absolue de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$.

2.b Pour quelles valeurs de $\alpha > 1$, l'intégrale $I_{1,\alpha}$ existe-t-elle ?

3. On suppose *dans cette question* que $0 < \alpha \leqslant 1$.

3.a Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge.

(on pourra considérer $\displaystyle\int_1^{x} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ et utiliser une intégration par parties).

3.b En déduire que l'intégrale $I_{1,\alpha}$ converge.

3.c On considère la série de terme général $u_k = \displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$.

3.d Montrer que pour $k \in \mathbb{N}$, $u_k = (-1)^k \displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left|\frac{\sin t}{t^\alpha}\right|\mathrm{d}t$ (distinguer les cas k pair et k impair).

3.e Montrer que pour $k \in \mathbb{N}^*$: $\dfrac{2}{(k+1)^\alpha \pi^\alpha} \leqslant |u_k| \leqslant \dfrac{2}{k^\alpha \pi^\alpha}$.

3.f En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{\pi}^{n\pi} \left|\frac{\sin t}{t^\alpha}\right|\mathrm{d}t$. L'intégrale $I_{1,\alpha}$ est-elle absolument convergente ?

4. On suppose *dans cette question* que $\alpha \leqslant 0$. On considère la suite de terme général $v_n = \displaystyle\int_{\pi}^{n\pi} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$.

Justifier que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a $|v_{n+1} - v_n| \geqslant 2$ et en déduire la nature de l'intégrale $I_{1,\alpha}$.

Partie II : Cas $n = 3$ et $\alpha = 2$.

1. Étudier la convergence de $I_{3,2}$.

2. 2.a Soit $f : \left]0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \dfrac{\sin t}{t}$. Montrer que f est décroissante sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.

2.b Soient a et $b \in \mathbb{R}$ tels que $0 < a < b$. Soit $F_{a,b}(x) = \displaystyle\int_{ax}^{bx} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

2(b)2.1 Étudier la parité de $F_{a,b}$.

2(b)2.2 Montrer que la limite de $F_{a,b}(x)$ est $\ln\left(\dfrac{b}{a}\right)$ lorsque x tend vers 0.

Indication : On pourra utiliser un encadrement judicieux de la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ sur l'intervalle $[ax, bx]$ lorsque $x \to 0^+$, en se servant de la question 2a.

3. Soit $I(\varepsilon) = \displaystyle\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

3.a Linéariser la fonction $t \mapsto \sin^3 t$.

3.b Montrer que $I(\varepsilon) = kF_{1,3}(\varepsilon)$ où k est une constante que l'on déterminera.

3.c En déduire la valeur de $I_{3,2}$.

Partie III : Cas $\alpha = n$.

On pose $A_n = I_{n,n} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n \mathrm{d}t$.

1. On admet que $A_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$. x étant un réel strictement positif, calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t}\,\mathrm{d}t$.

2. Étudier la convergence de l'intégrale A_n pour n supérieur ou égal à 2.

3. Calculer A_2 (on pourra faire une intégration par parties).

4. 4.a À l'aide d'intégrations par parties, montrer que $A_4 = \dfrac{2}{3} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t(4\cos^2 t - 1)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

4.b En déduire A_4 en fonction de A_2, puis la valeur de A_4.

Correction ▼ [ig11]

Exercice 12

On admet que l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} \mathrm{d}u$ est convergente et vaut $\frac{\pi}{2}$.

1. Calculer l'intégrale $I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(au)}{u} \mathrm{d}u$ où a est un réel.
2. (a) Justifier la convergence de l'intégrale $J = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2} \mathrm{d}u$.

   (b) Calculer J.
3. On considère $K(a,b) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(au).\sin(bu)}{u^2} \mathrm{d}u$, où a et b sont des réels.

   (a) Exprimer $K(a,b)$ à l'aide de $I(a+b)$ et $I(a-b)$.

   (b) En déduire les valeurs de $K(a,b)$ en distinguant les différentes régions du plan (a,b).

   (c) Donner une expression de $K(a,b)$ regroupant les différents cas.

Correction ▼ [ig01]

Exercice 13

On note, lorsque cette valeur est définie, $F(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} \mathrm{d}t$.

1. Montrer que $F(x)$ existe pour tout $x > 0$.
2. Montrer que pour tout $x > 0$:
$$F(x) = F(1) + \int_x^1 \frac{e^{-t}}{t} \mathrm{d}t$$
3. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$. Préciser F'.
4. (a) Justifier que $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 0$.

   (b) Montrer que pour tout $x \in]0, 1]$:
$$\int_x^1 \frac{e^{-t}}{t} \mathrm{d}t \geqslant -\frac{\ln x}{e}$$

   (c) En déduire la limite de $F(x)$ lorsque x tend vers 0^+.
5. Dans cette question, on cherche à déterminer un équivalent lorsque x tend vers 0 de $F(x)$.

   (a) Justifier, par exemple à l'aide de l'inégalité des accroissements finis, que :
$$\forall t \in]0, 1], \quad |e^{-t} - 1| \leqslant t$$

   (b) En déduire que, pour tout $x \in]0, 1]$:
$$\left| \int_x^1 \frac{e^{-t}}{t} \mathrm{d}t + \ln x \right| \leqslant 1$$
   (on pourra écrire $\ln x$ sous forme d'une intégrale).

   (c) En déduire que $F(x) \underset{x \to 0^+}{\sim} -\ln x$.
6. Dans cette question, on cherche à déterminer un équivalent lorsque x tend vers $+\infty$ de $F(x)$.

   (a) Montrer que, pour tout $x > 0$, $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} \mathrm{d}t$ converge.

   (b) Montrer que, pour tout $x > 0$, $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{x} F(x)$.

   (c) En déduire, à l'aide d'une intégration par parties, que $F(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x}$.

Correction ▼ [ig02]

Exercice 14

On considère, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale $J_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^3)^n}$.

1. Justifier la convergence de cette intégrale.
2. Calculer J_1 en utilisant une décomposition en éléments simples.
3. En utilisant une intégration par parties, donner une expression de $J_n - J_{n+1}$ en fonction de J_n. En déduire que $J_{n+1} = \dfrac{3n-1}{3n} J_n$.
4. On pose $v_n = \sqrt[3]{n} J_n$ et $u_n = \ln(v_n)$.
   (a) Montrer que la série $\sum_{n \geqslant 1} (u_{n+1} - u_n)$ converge.
   Que peut-on en déduire concernant la suite (u_n) ?
   (b) En déduire qu'il existe $A > 0$ tel que $J_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{A}{\sqrt[3]{n}}$.

Correction ▼ [ig03]

Exercice 15

L'objet de cet exercice est d'obtenir (encore) une approximation de la constante d'Euler définie par :

$$\gamma = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n) \right)$$

n est un entier supérieur ou égal à 1 fixé. On définit les fonctions A et B d'une variable réelle par les relations :

$$A(x) = \int_0^x \frac{1 - e^{-t}}{t} \, \mathrm{d}t, \qquad B(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} \, \mathrm{d}t.$$

1. (a) Montrer que A est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que B est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. La fonction B est-elle définie en 0 ?
   (c) Justifier que B est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer (après avoir justifié l'existence de l'intégrale) que :
   $$\int_0^1 \frac{1 - (1-u)^n}{u} \, \mathrm{d}u = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$
   En déduire que :
   $$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n = \int_0^1 \frac{1 - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n}{t} \, \mathrm{d}t - \int_1^n \frac{\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n}{t} \, \mathrm{d}t.$$
3. (a) Montrer que pour tout u de $[0,1]$:
   $$(1 - u^2) \, \mathrm{e}^{-u} \leqslant 1 - u \leqslant \mathrm{e}^{-u}.$$
   (b) Montrer que pour tout α de $[0,1]$:
   $$(1 - \alpha)^n \geqslant 1 - n\alpha.$$
   (c) En déduire que pour tout t de $[0,n]$:
   $$0 \leqslant \mathrm{e}^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leqslant \frac{t^2}{n} \mathrm{e}^{-t}.$$
   (d) Déduire de ce qui précède que $\gamma = A(1) - B(1)$.
4. Soit $x > 0$. Calculer $A(x) - B(x) - A(1) + B(1)$. En déduire que pour tout $x > 0$:
   $$\gamma = A(x) - B(x) - \ln x.$$
5. (a) Montrer que pour tout $x > 0$, $\quad 0 \leqslant B(x) \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$.
   (b) Déterminer $x_0 > 0$ tel que, pour $x \geqslant x_0$, on ait $B(x) \leqslant \dfrac{1}{3} 10^{-2}$.
6. (a) Montrer que A est développable en série entière :
   $$A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$
   en précisant la valeur de a_n.

(b) Soit $x > 0$ fixé. Montrer que la suite $(|a_n x^n|)_{n \geqslant 0}$ est décroissante pour $n \geqslant x$. En déduire, pour $n \geqslant x$, un majorant du reste d'ordre n de la série $\sum a_n x^n$.

7. Indiquer comment utiliser les résultats précédents pour calculer une valeur approchée de γ à 10^{-2} près.

Correction ▼ [ig04]

Corrigés des sujets :

Correction de l'exercice 1 ▲

1. La fonction $t \mapsto \dfrac{\ln t}{t-1}$ est continue et positive sur $]0,1[$.

   ⋆ Au voisinage de 0, on a : $\dfrac{\ln t}{t-1} \underset{t\to 0}{\sim} -\ln t$.

   Or $\displaystyle\int_0^{1/2} \ln t \,\mathrm{d}t$ converge, donc $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\ln t}{t-1}\,\mathrm{d}t$ converge.

   ⋆ Au voisinage de 1, on a : $\ln(t) = \ln(1+(t-1)) \underset{t\to 1}{\sim} t-1$.

   Ainsi $\displaystyle\lim_{t\to 1} \frac{\ln t}{t-1} = \lim_{t\to 1} \frac{t-1}{t-1} = 1$.

   La fonction se prolonge par continuité en 1, donc $\displaystyle\int_{1/2}^{1} \frac{\ln t}{t-1}\,\mathrm{d}t$ existe.

   En résumé :

$$\boxed{\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1}\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

2. Il faut distinguer deux cas :

   ⋆ Pour $k=0$, on sait que $I_0 = \displaystyle\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut -1.

   ⋆ Pour $k \geqslant 1$, la fonction $t \mapsto t^k \ln(t)$ est continue sur $]0,1]$ et se prolonge par continuité en 0 puisque d'après le théorème des croissances comparées :

$$\lim_{t\to 0} t^k \ln(t) = 0.$$

   Donc I_k existe pour $k \geqslant 1$, et pour le calcul (qui reste valable aussi pour $k=0$) on peut effectuer l'intégration par parties qui suit :

$$\begin{array}{lll} u(t) = \ln(t) & \text{et} & v'(t) = t^k \\ u'(t) = \dfrac{1}{t} & & v(t) = \dfrac{t^{k+1}}{k+1} \end{array}$$

   valable car $u(t)v(t) = \dfrac{\ln(t)t^{k+1}}{k+1} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$. Ce qui donne :

$$\begin{aligned} I_k &= \left[\frac{\ln(t)t^{k+1}}{k+1}\right]_0^1 - \frac{1}{k+1}\int_0^1 t^k\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{k+1}\left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_0^1 = -\frac{1}{(k+1)^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall k \geqslant 0, \quad I_k = -\frac{1}{(k+1)^2}}$$

3. Par linéarité de l'intégrale, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} I_k &= \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 t^k \ln(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \left[\sum_{k=0}^{n} t^k\right] \ln(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \frac{1-t^{n+1}}{1-t}\ln(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{1-t}\ln(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1-t}\ln(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

   On reconnaît l'écriture qui suit :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} I_k = \int_0^1 \frac{t^{n+1}\ln(t)}{t-1}\,\mathrm{d}t - I}$$

4. $\lim_{t\to 0} t\ln(t) = 0$ par croissances comparées donc : $\boxed{\lim_{t\to 0} \frac{t\ln(t)}{t-1} = 0}$.

On a vu de plus, à la question 1, que $\lim_{t\to 1} \frac{\ln t}{t-1} = 1$, donc : $\boxed{\lim_{t\to 1} \frac{t\ln(t)}{t-1} = 1}$.

On en déduit que la fonction $t \mapsto \frac{t\ln t}{t-1}$ se prolonge en une fonction continue h sur le segment $[0,1]$. Comme il s'agit d'une fonction continue sur un segment, le prolongement h est borné (et atteint ses bornes), autrement dit :

$$\exists M > 0,\ \ \forall t \in [0,1], \quad |h(t)| \leqslant M$$

En particulier, comme $h(t) = \frac{t\ln t}{t-1}$ pour $t \in]0,1[$:

$$\boxed{\exists M > 0,\ \ \forall t \in]0,1[, \quad \left|\frac{t\ln t}{t-1}\right| \leqslant M}$$

5. On peut utiliser le résultat qui précède de la manière suivante :

$$\left|\int_0^1 \frac{t^{n+1}\ln t}{t-1}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^1 \left|\frac{t^{n+1}\ln t}{t-1}\right|\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \left|\frac{t\ln t}{t-1}\right| t^n\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 Mt^n\,\mathrm{d}t$$

De plus $\int_0^1 Mt^n\,\mathrm{d}t = \left[\frac{Mt^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{M}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. D'après le théorème d'encadrement :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^{n+1}\ln t}{t-1}\,\mathrm{d}t = 0}$$

Or on sait d'après les questions 2 et 3 que :

$$I = \int_0^1 \frac{t^{n+1}\ln t}{t-1}\,\mathrm{d}t - \sum_{k=1}^{n} I_k = \int_0^1 \frac{t^{n+1}\ln t}{t-1}\,\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^2}$$

Donc par passage à la limite lorsque n tend vers $+\infty$:

$$\boxed{I = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}}$$

On conclut immédiatement à l'aide du résultat de la partie I :

$$\boxed{I = \frac{\pi^2}{6}}$$

Correction de l'exercice 2 ▲

Partie I : Étude d'une fonction définie par une intégrale

1. Soit $x > 0$. La fonction $t \mapsto \frac{e^{-t}}{x+t}$ est continue et positive sur $[0,+\infty[$, et pour $t \geqslant 1$:

$$\frac{e^{-t}}{x+t} \leqslant \frac{e^{-t}}{t} \leqslant e^{-t}$$

On sait que $\int_1^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge, donc $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t$ converge.

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

On note $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in]0,+\infty[$, par : $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t$.

2. Soit $x > 0$. La fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{x+t}$ est positive sur $]0,+\infty[$, donc d'après la relation de Chasles :

$$f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t}_{\geqslant 0} \geqslant \int_0^1 \frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t$$

De plus, pour $t \in [0,1]$, on a $\dfrac{e^{-t}}{x+t} \geqslant \dfrac{e^{-1}}{x+t}$, donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t \geqslant \int_0^1 \frac{e^{-1}}{x+t}\,\mathrm{d}t$:

$$\boxed{\forall x \in]0,+\infty[,\ f(x) \geqslant \int_0^1 \frac{e^{-1}}{x+t}\,\mathrm{d}t}$$

Enfin $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-1}}{x+t}\,\mathrm{d}t = \left[e^{-1}\ln(x+t)\right]_0^1 = e^{-1}(\ln(x+1) - \ln(x)) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$.
On conclut avec le théorème d'encadrement :

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0+}{\longrightarrow} +\infty}$$

3. Soit $x > 0$, on a d'autre part :

$$\forall t \in [0,+\infty[, \quad 0 \leqslant \frac{e^{-t}}{x+t} \leqslant \frac{e^{-t}}{x}$$

et par passage à l'intégrale entre 0 et $+\infty$:

$$0 \leqslant f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{-e^{-t}}{x}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x}$$

$$\boxed{\forall x \in]0,+\infty[,\ 0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{x}}$$

Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, on conclut, toujours avec le théorème d'encadrement :

$$\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$$

4. La fonction $t \mapsto te^{-t}$ est continue et positive sur $]0,+\infty[$, et on a au voisinage de $+\infty$:

$$te^{-t} \leqslant \frac{1}{t^2}$$

En effet, $t^2 \times te^{-t} = t^3e^{-t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées, et donc :

$$\exists A > 0,\ \forall t \geqslant A, \quad t^2 \times te^{-t} \leqslant 1 \quad (\text{i.e } te^{-t} \leqslant \frac{1}{t^2}).$$

Comme $\displaystyle\int_A^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ converge, on en déduit que $\displaystyle\int_A^{+\infty} te^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge, d'où :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} te^{-t}\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

Soit $x > 0$:

$$\begin{aligned}\left|f(x) - \frac{1}{x}\right| &= \left|\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{x}\right| = \left|\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x}\,\mathrm{d}x\right| \\ &= \left|\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-t} - (x+t)e^{-t}}{x(x+t)}\,\mathrm{d}t\right| = \left|\int_0^{+\infty} \frac{-te^{-t}}{x(x+t)}\,\mathrm{d}t\right|\end{aligned}$$

Or $\left|\int_0^{+\infty}\frac{-te^{-t}}{x(x+t)}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^{+\infty}\left|\frac{-te^{-t}}{x(x+t)}\right|\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\frac{te^{-t}}{x(x+t)}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty}\frac{te^{-t}}{x^2}\,\mathrm{d}t$, ainsi :

$$\boxed{\forall x \in]0,+\infty[, \quad \left|f(x)-\frac{1}{x}\right| \leqslant \frac{1}{x^2}\int_0^{+\infty} te^{-t}\,\mathrm{d}t.}$$

On en déduit que $f(x)-\dfrac{1}{x} = o\left(\dfrac{1}{x}\right)$ car : $x\left|f(x)-\dfrac{1}{x}\right| \leqslant \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Donc $f(x) = \dfrac{1}{x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$ et on en déduit :

$$\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}.}$$

Partie II : Une autre expression intégrale de f.

A - Dérivabilité et expression de la dérivée de f sous forme d'une intégrale

5. Soit $(x,h) \in]0,+\infty[\times\mathbb{R}^*$ tel que $h \geqslant -\dfrac{x}{2}$.

(a) Soit $x>0$. La fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{(x+t)^2}$ est continue et positive sur $[0,+\infty[$, et pour $t \geqslant 1$:

$$\frac{e^{-t}}{(x+t)^2} \leqslant \frac{e^{-t}}{t^2} \leqslant e^{-t}$$

On sait que $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge, donc $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

(b) Soit $t \in [0,+\infty[$:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h+t}-\frac{1}{x+t}\right)+\frac{1}{(x+t)^2}\right| &= \left|\frac{1}{h}\times\frac{x+t-(x+h+t)}{(x+h+t)(x+t)}+\frac{1}{(x+t)^2}\right| \\
&= \left|\frac{-1}{(x+h+t)(x+t)}+\frac{1}{(x+t)^2}\right| = \left|\frac{-(x+t)+(x+h+t)}{(x+h+t)(x+t)^2}\right| \\
&= \frac{|h|}{(x+h+t)(x+t)^2}
\end{aligned}$$

Or $(x+t)^2 \geqslant x^2$ et $x+h+t \geqslant x+h \geqslant x-\dfrac{x}{2} = \dfrac{x}{2}$, d'où :

$$\boxed{\forall t \in [0,+\infty[, \quad \left|\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h+t}-\frac{1}{x+t}\right)+\frac{1}{(x+t)^2}\right| \leqslant \frac{2|h|}{x^3}.}$$

(c) Pour $t \in]0,+\infty[$, on a donc :

$$-\frac{2|h|}{x^3} \leqslant \frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h+t}-\frac{1}{x+t}\right)+\frac{1}{(x+t)^2} \leqslant \frac{2|h|}{x^3}$$

d'où :

$$-\frac{2|h|}{x^3}e^{-t} \leqslant \frac{1}{h}\left(\frac{e^{-t}}{x+h+t}-\frac{e^{-t}}{x+t}\right)+\frac{e^{-t}}{(x+t)^2} \leqslant \frac{2|h|}{x^3}e^{-t}$$

ce qui entraîne, par croissance de l'intégrale :

$$-\frac{2|h|}{x^3}\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{h}\left(\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{x+h+t}\,\mathrm{d}t-\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t\right)+\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{2|h|}{x^3}\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

et comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t = 1$, on a :

$$\left|\frac{1}{h}\left(\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{x+h+t}\,\mathrm{d}t-\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t\right)+\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{2|h|}{x^3}\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

c'est à dire :

$$\boxed{\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{2|h|}{x^3}.}$$

6. On constate que $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2|h|}{x^3}=0$, ainsi par le théorème d'encadrement :

$$\boxed{\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=-\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t}$$

ce qui prouve que :

$$\boxed{f \text{ est dérivable sur }]0,+\infty[\text{ et : } \forall x\in]0,+\infty[,\ f'(x)=-\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t.}$$

7. Soit $x\in]0,+\infty[$ et $(\varepsilon,A)\in]0,1]\times[1,+\infty[$. On effectue l'intégration par parties suivante :

$$\begin{array}{lll} u(t)=e^{-t} & \text{et} & v'(t)=\dfrac{1}{(x+t)^2} \\ u'(t)=-e^{-t} & & v(t)=\dfrac{-1}{x+t} \end{array}$$

et on obtient :

$$\int_\varepsilon^A \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t=\left[\frac{-e^{-t}}{x+t}\right]_{t=\varepsilon}^{t=A}-\int_\varepsilon^A\frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t$$

Ainsi, pour tout $x\in]0,+\infty[$ et tout $(\varepsilon,A)\in]0,1]\times[1,+\infty[$:

$$\boxed{\int_\varepsilon^A \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t=-\frac{e^{-A}}{x+A}+\frac{e^{-\varepsilon}}{x+\varepsilon}-\int_\varepsilon^A\frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t.}$$

8. En effectuant la limite lorsque A tend vers $+\infty$, on a pour tout $\varepsilon\in]0,1]$:

$$\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t=\frac{e^{-\varepsilon}}{x+\varepsilon}-\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t.$$

puis en effectuant la limite lorsque ε tend vers 0 :

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{x}-\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t$$

c'est à dire :

$$-f'(x)=\frac{1}{x}-f(x)$$

En résumé :

$$\boxed{\forall x\in]0,+\infty[,\quad f'(x)=-\frac{1}{x}+f(x).}$$

9. D'après l'expression trouvée, f' est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables et :

$$\forall x\in]0,+\infty[,\quad f''(x)=\frac{d}{\mathrm{d}x}\left[-\frac{1}{x}+f(x)\right]=\frac{1}{x^2}+f'(x)$$

De plus, f' est dérivable donc continue sur $]0,+\infty[$, f'' est continue comme somme de fonctions continues sur $]0,+\infty[$.
Résumons :

$$\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur }]0,+\infty[\text{ et pour } x\in]0,+\infty[,\ f''(x)=\frac{1}{x^2}+f'(x).}$$

B - Intervention d'une fonction auxiliaire g

On note $g:]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x>0$, par : $g(x)=e^{-x}f(x)$.

10. g est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme produit de fonctions dérivables et pour $x\in]0,+\infty[$:

$$g'(x)=-e^{-x}f(x)+e^{-x}f'(x)=e^{-x}\left[f'(x)-f(x)\right]$$

On en déduit, grâce au résultat de la question 8, que :

$$\boxed{\forall x\in]0,+\infty[,\ \ g'(x)=-\frac{e^{-x}}{x}.}$$

11. Soit $x>0$. La fonction $u\mapsto \dfrac{e^{-u}}{u}$ est continue et positive sur $[x,+\infty[$ et pour $u\geqslant x$, on a :

$$0\leqslant \frac{e^{-u}}{u}\leqslant \frac{e^{-u}}{x}$$

Comme $\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-u}\,\mathrm{d}u$ converge, alors par le principe de majoration :

$$\boxed{\text{Pour tout } x\in]0,+\infty[\text{, l'intégrale } \int_x^{+\infty}\frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u \text{ converge.}}$$

Remarquons d'autre part, d'après la relation de Chasles, que :

$$\int_x^{+\infty}\frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u=\int_1^{+\infty}\frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u-\int_1^{x}\frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u$$

La première intégrale ne dépend pas de x donc sa dérivée est nulle et la seconde a pour dérivée $-\dfrac{e^{-x}}{x}$ d'après le théorème fondamental de l'analyse. On a donc, d'après la question 10 :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_x^{+\infty}\frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u\right)=-\frac{e^{-x}}{x}=-g'(x)$$

Ainsi : $\forall x\in]0,+\infty[,\quad g(x)=\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u+K.$

Or on sait d'après I.3 que f a une limite nulle en $+\infty$, donc c'est aussi clairement le cas pour g, ce qui donne $K=0$. En résumé :

$$\boxed{\forall x\in]0,+\infty[,\quad g(x)=\int_x^{+\infty}\frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u.}$$

et comme $f(x)=e^x g(x)$, on a immédiatement :

$$\boxed{\forall x\in]0,+\infty[,\quad f(x)=e^x\int_x^{+\infty}\frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u.}$$

12. Enfin, on a vu à la partie I que $f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{x}$, d'où :

$$g(x)=e^{-x}f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{e^{-x}}{x}$$

c'est à dire :

$$\boxed{\int_x^{+\infty}\frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{e^{-x}}{x}.}$$

Correction de l'exercice 3 ▲

Soient a et b deux réels avec $0<a<b$.

1. La fonction $h:t\mapsto \dfrac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}$ est continue et positive sur $]0,+\infty[$ ($a<b \ \Rightarrow\ e^{-at}>e^{-bt}$).

- ⋆ Au voisinage de 0, on a :

$$h(t) = \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} = \frac{1 - at + o(t) - (1 - bt + o(t))}{t} = \frac{(b-a)t + o(t)}{t} = b - a + o(1)$$

Ce calcul prouve que $\lim\limits_{t \to 0} h(t) = b - a$.

La fonction h se prolonge par continuité en 0 donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

- ⋆ Pour $t \geqslant 1$, on trouve :

$$0 \leqslant \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} \leqslant \frac{e^{-at}}{t} \leqslant e^{-at}$$

Puisque $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-at}\,\mathrm{d}t$ converge, alors par comparaison $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

2. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < x < y$. On a :
On effectue ensuite un changement de variable dans chacune des intégrales ($u = at$ dans la première et $u = bt$ dans la seconde). Ceci donne :

$$\int_x^y \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\,\mathrm{d}t = \int_x^y \frac{e^{-at}}{t}\,\mathrm{d}t - \int_x^y \frac{e^{-bt}}{t}\,\mathrm{d}t$$

$$\begin{aligned} \int_x^y \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\,\mathrm{d}t &= \int_{ax}^{ay} \frac{e^{-u}}{u/a}\frac{\mathrm{d}u}{a} - \int_{bx}^{by} \frac{e^{-u}}{u/b}\frac{\mathrm{d}u}{b} \\ &= \int_{ax}^{ay} \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u - \int_{bx}^{by} \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u \end{aligned}$$

La relation de Chasles donne :

$$\int_x^y \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\,\mathrm{d}t = \left[\int_{ax}^{bx} \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u + \int_{bx}^{ay} \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u\right] - \left[\int_{bx}^{ay} \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u - \int_{ay}^{by} \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u\right]$$

Il reste à simplifier :

$$\boxed{\int_x^y \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{ax}^{bx} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t - \int_{ay}^{by} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t.}$$

3. Soit $z > 0$. Pour $t \in [az, bz]$, on a :

$$\frac{e^{-bz}}{t} \leqslant \frac{e^{-t}}{t} \leqslant \frac{e^{-az}}{t}$$

Et par croissance de l'intégrale, on trouve :

$$e^{-bz} \int_{az}^{bz} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \int_{az}^{bz} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant e^{-az} \int_{az}^{bz} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

avec $\displaystyle\int_{az}^{bz} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln(bz) - \ln(az) = \ln\frac{b}{a}$, on aboutit à :

$$\boxed{e^{-bz} \ln\frac{b}{a} \leqslant \int_{az}^{bz} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant e^{-az} \ln\frac{b}{a}.}$$

4. D'après les questions 2 et 3, on a pour $x, y \in]0, +\infty[$ $(x < y)$:

$$e^{-bx} \ln\frac{b}{a} - e^{-ay} \ln\frac{b}{a} \leqslant \int_x^y \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{ax}^{bx} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t - \int_{ay}^{by} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant e^{-ax} \ln\frac{b}{a} - e^{-by} \ln\frac{b}{a}$$

Ces inégalités se conservent lorsque $y \to +\infty$, donc :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad e^{-bx} \ln\frac{b}{a} \leqslant \int_x^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant e^{-ax} \ln\frac{b}{a}$$

Enfin, le théorème des gendarmes autorise à conclure puisque

$$\lim_{x\to 0} e^{-bx}\ln\frac{b}{a}=\lim_{x\to 0} e^{-ax}\ln\frac{b}{a}=\ln\frac{b}{a}$$

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\,\mathrm{d}t=\ln\frac{b}{a}.}$$

On notera que les passages à la limite lorsque $y\to+\infty$ et $x\to 0$ se font *l'un après l'autre* et non simultanément.

Correction de l'exercice 4 ▲

1. La fonction $t\mapsto\dfrac{t}{(t+2)(t^2+1)}$ est continue et positive sur $[0,+\infty[$, et au voisinage de $+\infty$:

$$\frac{t}{(t+2)(t^2+1)}\underset{t\to+\infty}{\sim}\frac{t}{t\times t^2}\underset{t\to+\infty}{\sim}\frac{1}{t^2}$$

Comme $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ converge alors $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{t}{(t+2)(t^2+1)}\mathrm{d}t$ converge, et :

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{t}{(t+2)(t^2+1)}\mathrm{d}t\text{ converge.}}$$

Pour le calcul, on a affaire à une fraction rationnelle. Dans un premier temps, cherchons les réels α,β,γ tels que pour $t\in[0,+\infty[$:

$$\begin{aligned}\frac{t}{(t+2)(t^2+1)} &= \frac{\alpha}{t}+\frac{\beta t+\gamma}{t^2+1}=\frac{\alpha(t^2+1)+(\beta t+\gamma)(t+2)}{(t+2)(t^2+1)}\\ &= \frac{(\alpha+\beta)t^2+(2\beta+\gamma)t+(\alpha+2\gamma)}{(t+2)(t^2+1)}\end{aligned}$$

La condition est réalisée si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{l}\alpha+\beta=0\\ 2\beta+\gamma=1\\ \alpha+2\gamma=0\end{array}\right.\quad\text{i.e.}\quad\left\{\begin{array}{l}\beta=-\alpha\\ \gamma=-\alpha/2\\ -2\alpha-\alpha/2=-5\alpha/2=1\end{array}\right.$$

Soit $\alpha=-\frac{2}{5}$, $\beta=\frac{2}{5}$ et $\gamma=\frac{1}{5}$. Il reste à effectuer le calcul (en prenant $x>0$ comme borne supérieure pour éviter les intégrales divergentes) :

$$\begin{aligned}\int_0^x\frac{t}{(t+2)(t^2+1)}\mathrm{d}t &= -\frac{2}{5}\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{t+2}+\frac{1}{5}\int_0^x\frac{2t\,\mathrm{d}t}{t^2+1}+\frac{1}{5}\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}\\ &= \left[-\frac{2}{5}\ln(x+2)+\frac{2}{5}\ln 2\right]+\frac{1}{5}\ln(x^2+1)+\frac{1}{5}\arctan x\\ &= \frac{1}{5}\ln\left(\frac{x^2+1}{(x+2)^2}\right)+\frac{1}{5}\arctan x+\frac{2}{5}\ln 2\end{aligned}$$

Par passage à la limite (à détailler) lorsque x tend vers $+\infty$, on obtient finalement :

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{t}{(t+2)(t^2+1)}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{10}+\frac{2\ln 2}{5}}$$

2. Pour la deuxième intégrale, le changement de variable $t=\tan u$ ($\mathrm{d}t=(1+\tan^2 u)\,\mathrm{d}u$) revient à poser $u=\arctan t$ ce qui est correct car $t\mapsto\arctan t$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0,+\infty[$ dans $[0,\pi/2[$:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin u}{2\cos u+\sin u}\mathrm{d}u &= \int_0^{\pi/2}\frac{\sin u}{\cos u}\frac{1}{2+\frac{\sin u}{\cos u}}\mathrm{d}u\\ &= \int_0^{\pi/2}\tan u\times\frac{1}{2+\tan u}\times\frac{(1+\tan^2 u)\,\mathrm{d}u}{1+\tan^2 u}\\ &\underset{t=\tan u}{=} \int_0^{+\infty}\frac{t}{(t+2)(t^2+1)}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

On retrouve exactement l'intégrale calculée à la question 1 :

$$\boxed{\int_0^{\pi/2} \frac{\sin u}{2\cos u + \sin u}\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{10} + \frac{2\ln 2}{5}}$$

Correction de l'exercice 5 ▲

On pose $B(u,v) = \displaystyle\int_0^1 t^{u-1}(1-t)^{v-1}\,\mathrm{d}t$.

1. La fonction $t \mapsto t^{u-1}(1-t)^{v-1}$ est continue et positive sur $]0,1[$. Il reste à examiner les bornes :
   - Au voisinage de 0, on constate que :
   $$t^{u-1}(1-t)^{v-1} \underset{t\to 0}{\sim} t^{u-1} = \frac{1}{t^{1-u}}$$
   Donc par comparaison à une intégrale de référence, on conclut que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1/2} t^{u-1}(1-t)^{v-1}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $1-u<1$, i.e. $u>0$.
   - Au voisinage de 1, on constate que :
   $$t^{u-1}(1-t)^{v-1} \underset{t\to 1}{\sim} (1-t)^{v-1} = \frac{1}{(1-t)^{1-v}}$$
   Donc par comparaison à une intégrale de référence, il est possible d'affirmer que $\displaystyle\int_{1/2}^{1} t^{u-1}(1-t)^{v-1}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $1-v<1$, i.e. $v>0$.

   En conclusion, l'ensemble des valeurs de $(u,v)\in\mathbb{R}^2$ pour lesquelles l'intégrale est définie est :
   $$\boxed{D = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*}$$

2. Calculons $B\big(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\big) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t-t^2}}\,\mathrm{d}t$.

   Sous forme canonique, la fonction à intégrer devient :
   $$B\Big(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\Big) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2}}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-(2t-1)^2}}\,\mathrm{d}t$$
   Le changement de variable $x = 2t-1$ donne :
   $$B\Big(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\Big) = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \big[\arcsin x\big]_{-1}^1$$
   D'où, après calcul :
   $$\boxed{B\Big(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\Big) = \pi}$$

3. Le changement de variable $x = 1-t$ donne très simplement :
   $$B(u,v) = \int_0^1 t^{u-1}(1-t)^{v-1}\,\mathrm{d}t = \int_1^0 (1-x)^{u-1}x^{v-1}(-\mathrm{d}x) = \int_0^1 x^{v-1}(1-x)^{u-1}\,\mathrm{d}x$$
   Il est donc prouvé que :
   $$\boxed{\forall (u,v)\in D,\quad B(u,v) = B(v,u)}$$

4. Constatons maintenant par un jeu d'écriture que pour $(u,v)\in D$:
   $$B(u,v) = \int_0^1 t^{u-1}(1-t)^{v-1}(t+(1-t))\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^{u}(1-t)^{v-1}\,\mathrm{d}t + \int_0^1 t^{u-1}(1-t)^{v}\,\mathrm{d}t$$
   Il est à noter que l'écriture ci-dessus est valable puisque si $(u,v)\in D$, $(u+1,v)$ et $(u,v+1)\in D$. En conclusion :
   $$\boxed{\forall (u,v)\in D,\quad B(u,v) = B(u+1,v) + B(u,v+1)}$$

5. L'intégration par parties suivante :

$$\begin{array}{lcl} f(t) = t^u & \text{et} & g'(t) = (1-t)^{v-1} \\ f'(t) = ut^{u-1} & & g(t) = -\dfrac{1}{v}(1-t)^v \end{array}$$

valable car pour $(u,v) \in D$, $f(t)g(t) = -\frac{1}{v}t^u(1-t)^v$ a une limite finie (nulle) en 0 et 1, donne :

$$B(u+1,v) = \left[-\frac{1}{v}t^u(1-t)^v\right]_0^1 + \frac{u}{v}\int_0^1 t^{u-1}(1-t)^v \,\mathrm{d}t = \frac{u}{v}B(u,v+1)$$

La relation trouvée à la question précédente nous autorise ensuite à écrire que :

$$B(u+1,v) = \frac{u}{v}\big(B(u,v) - B(u+1,v)\big)$$

On peut alors rassembler : $\left(\dfrac{v}{u}+1\right)B(u+1,v) = \dfrac{u+v}{u}B(u+1,v) = B(u,v)$, pour obtenir le résultat :

$$\boxed{\forall (u,v) \in D, \quad B(u+1,v) = \frac{u}{u+v}B(u,v)}$$

6. On conjecture assez facilement que pour $(n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} B(n+1,p) &= \frac{n}{n+p}B(n,p) = \frac{n(n-1)}{(n+p)(n-1+p)}B(n-1,p) \\ &= \dots = \frac{n(n-1)\dots 1}{(n+p)(n-1+p)\dots(1+p)}B(1,p) \end{aligned}$$

Soit $B(n+1,p) = \dfrac{n!p!}{(n+p)!}B(1,p)$, formule qu'il convient de montrer proprement par récurrence :

- Pour $n = 0$ le résultat est évident.
- Supposons le résultat vrai au rang n, c'est à dire $B(n+1,p) = \dfrac{n!p!}{(n+p)!}B(1,p)$. il s'agit de montrer que :

$$B(n+2,p) = \frac{(n+1)!p!}{(n+1+p)!}B(1,p)$$

  Or, on a avec la formule de la question précédente et l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} B(n+2,p) &= \frac{n+1}{n+1+p}B(n+1,p) = \frac{n+1}{n+1+p} \times \frac{n!p!}{(n+p)!}B(1,p) \\ &= \frac{(n+1)!p!}{(n+1+p)!}B(1,p) \end{aligned}$$

  Le résultat est donc vérifié au rang $n+1$.
- Par récurrence, le résultat est vrai pour tout entier n.

Autrement dit :

$$\boxed{\forall (n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}, \quad B(n+1,p) = \frac{n!p!}{(n+p)!}B(1,p)}$$

7. Le résultat que nous venons de prouver permet d'écrire pour $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$:

$$B(n,p) = \frac{(n-1)!p!}{(n+p-1)!}B(1,p)$$

Puis, avec la symétrie établie à la question 3 :

$$B(n,p) = \frac{(n-1)!p!}{(n+p-1)!}B(p,1) = \frac{(n-1)!p!}{(n+p-1)!} \times \frac{(p-1)!1!}{(p+1-1)}!$$

Et enfin, après simplifications :

$$\boxed{\forall (n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, \quad B(n,p) = \frac{(n-1)!(p-1)!}{(n+p-1)!}}$$

Correction de l'exercice 6 ▲

1. Soit a un réel strictement compris entre 0 et 1.
   (a) On pose $u = 1 - x \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 0$:
   $$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = \ln\left(\frac{1}{1-u}\right) = \ln(1+u+o(u)) = u + o(u) = 1 - x + o(1-x)$$
   On en conclut que :
   $$\boxed{\ln\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to 1}{\sim} 1 - x}$$
   (b) Soit p un réel et $q > -1$ un réel. Constatons que :
   - La fonction $x \mapsto x^p \left(\ln \frac{1}{x}\right)^q$ est continue et positive sur $\left[a, 1\right[$.
   - Au voisinage de 1, on a avec la question précédente :
   $$x^p \left(\ln \frac{1}{x}\right)^q \underset{x\to 1}{\sim} 1^p(1-x)^q = \frac{1}{(1-x)^{-q}}$$
   Comme $-q < 1$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^1 \frac{1}{(1-x)^{-q}}$ est convergente, ce qui par la règle des équivalences permet de dire que :
   $$\boxed{\text{Pour tout réel } p\text{, et pour tout réel } q \text{ strictement supérieur à } -1\text{, l'intégrale } \int_a^1 x^p \left(\ln \frac{1}{x}\right)^q \mathrm{d}x \text{ est convergente.}}$$
2. (a) Soit α un réel strictement positif et r un réel quelconque. Le théorème des croissances comparées permet d'écrire que :
   $$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^r}{x^\alpha} = 0}$$
   (b) On suppose encore $0 < a < 1$.
   Soit r un réel, et s un réel strictement supérieur à 1. On pose :
   $$s = 1 + 2\alpha, \quad \text{c'est à dire : } \quad \alpha = \frac{s-1}{2} > 0$$
   - La fonction $x \mapsto \dfrac{(\ln x)^r}{x^\alpha}$ est continue et positive sur $\left[\frac{1}{a}, +\infty\right[$ (car $\frac{1}{a} > 1$).
   - Au voisinage de $+\infty$, on a :
   $$\lim_{x\to+\infty} x^{1+\alpha} \times \frac{(\ln x)^r}{x^s} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^r}{x^\alpha} = 0 \text{ car } \alpha > 0$$
   Ce calcul prouve que $\dfrac{(\ln x)^r}{x^s} = o\left(\dfrac{1}{x^{1+\alpha}}\right)$ ce qui entraîne :
   $$\exists A > 0 \text{ tel que } \forall x \geqslant A, \quad 0 \leqslant \frac{(\ln x)^r}{x^s} \leqslant \frac{1}{x^{1+\alpha}}$$
   Comme $1+\alpha > 1$, on en déduit que $\displaystyle\int_A^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{1+\alpha}}$ converge. D'où $\displaystyle\int_{\frac{1}{a}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{1+\alpha}}$ converge. Alors, par comparaison avec une fonction dont l'intégrale est convergente on conclut que :
   $$\boxed{\text{L'intégrale } \int_{\frac{1}{a}}^{+\infty} \frac{(\ln x)^r}{x^s} \mathrm{d}x \text{ est convergente.}}$$
3. Soit p et q deux réels strictement supérieurs à -1. Résumons :
   - La fonction $x \mapsto x^p \left(\ln \frac{1}{x}\right)^q$ est continue et positive sur $]0, 1[$. On fixe $a > 0$:

- L'intégrale $\displaystyle\int_a^1 x^p\left(\ln\frac{1}{x}\right)^q \mathrm{d}x$ est convergente d'après la question 1 puisque $q > -1$.
- Le changement de variable $t = \frac{1}{u}$ donne :

$$\int_\alpha^a x^p\left(\ln\frac{1}{x}\right)^q \mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{\alpha}}^{\frac{1}{a}} \frac{(\ln u)^q}{u^p} \times \frac{-\,\mathrm{d}u}{u^2} = \int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{\alpha}} \frac{(\ln u)^q}{u^{p+2}}\,\mathrm{d}u$$

Comme $p+2 > 1$ la question 2 indique que cette expression tend vers $\displaystyle\int_{\frac{1}{a}}^{+\infty} \frac{(\ln u)^q}{u^{p+2}}\,\mathrm{d}u$ lorsque α tend vers 0, ce qui prouve que :

$$\int_0^a x^p\left(\ln\frac{1}{x}\right)^q \mathrm{d}x \text{ est convergente.}$$

En résumé, on peut écrire que :

Pour tout réel p et pour tout réel q tous deux strictement supérieurs à -1, l'intégrale $I(p,q) = \displaystyle\int_0^1 x^p\left(\ln\frac{1}{x}\right)^q \mathrm{d}x$ est convergente.

4. Soit p et q deux réels strictement supérieurs à -1 :
   (a) Le changement de variable $x = e^{-u}$, valable car $u \mapsto e^{-u}$ est une bijection de $]0,+\infty[$ sur $]0,1[$ nous donne :

$$I(p,q) = \int_0^{+\infty} \left(e^{-u}\right)^p \times \ln(e^u)^q \times |-e^{-u}|\,\mathrm{d}u$$

ce qui s'écrit sous forme simplifiée :

$$\boxed{I(p,q) = \int_0^{+\infty} e^{-(p+1)u}u^q\,\mathrm{d}u}$$

   (b) Le changement de variable affine $x = (p+1)u$ donne alors :

$$I(p,q) = \int_0^{+\infty} e^{-x}\left(\frac{x}{p+1}\right)^q \frac{\mathrm{d}x}{p+1} = \frac{1}{(p+1)^{q+1}}\int_0^{+\infty} e^{-x}x^q\,\mathrm{d}x$$

et on trouve par là que :

$$\boxed{I(p,q) = \frac{1}{(p+1)^{q+1}}I(0,q)}$$

5. (a) Soit q un réel strictement positif. Utilisons une intégration par parties :

$$\begin{array}{lcl} f(x) = x^q & \text{et} & g'(x) = e^{-x} \\ f'(x) = qx^{q-1} & & g(x) = -e^{-x} \end{array}$$

valable car $f(x)g(x) = -x^qe^{-x}$ a une limite (nulle) en 0 et en $+\infty$ par croissances comparées puisque $q > 0$.

$$I(0,q) = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^q\,\mathrm{d}x = \left[-x^qe^{-x}\right]_0^{+\infty} + q\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{q-1}\,\mathrm{d}x$$

Après simplification, il est établi que pour tout réel q strictement positif :

$$\boxed{I(0,q) = qI(0,q-1)}$$

   (b) Une récurrence immédiate nous permet alors de conclure que pour q entier positif ou nul :

$$I(0,q) = q!I(0,1) = q!\int_0^{+\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x = q!\left[-e^{-x}\right]_0^{+\infty} = q!$$

En combinant le résultat trouvé avec celui de la question 4b, on obtient pour $p > -1$ réel et $q \in \mathbb{N}$ (donc $q > -1$) :

$$I(p,q) = \frac{1}{(p+1)^{q+1}}I(0,q) = \frac{1}{(p+1)^{q+1}} \times q!$$

En résumé, pour p réel strictement supérieur à -1 et pour tout entier q positif ou nul :

$$\boxed{I(p,q) = \frac{q!}{(p+1)^{q+1}}}$$

Correction de l'exercice 7 ▲

Dans ce problème, on donne les intégrales :

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+x)}\quad;\quad J=\int_0^{+\infty}\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}(1+x)}\,\mathrm{d}x\quad;\quad K=\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\ln(x)}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x$$

1. Étude de l'intégrale I :
   (a) La fonction $x\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{x}(1+x)}$ est continue et positive sur $]0,+\infty[$. De plus :
   - ⋆ Au voisinage de 0 :
   $$\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\underset{x\to0}{\sim}\frac{1}{\sqrt{x}}$$
   et $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$ est une intégrale convergente, ce qui prouve l'existence de $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+x)}$.
   - ⋆ Au voisinage de $+\infty$:
   $$\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{1}{x\sqrt{x}}\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{1}{x^{3/2}}$$
   et $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^{3/2}}$ est une intégrale convergente, ce qui prouve l'existence de $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+x)}$.

   On résume :
   $$\boxed{\text{L'intégrale } I=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+x)}\text{ est convergente.}}$$
   (b) Appliquons à cette intégrale le changement de variable $u=\sqrt{x}$ ($\mathrm{d}u=1/(2\sqrt{x})\mathrm{d}x$). Celui-ci est valable car $x\mapsto\sqrt{x}$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ strictement croissante de R_+^* dans $\mathbb{R}_+^*$:
   $$I=\int_0^{+\infty}\frac{2\,\mathrm{d}u}{1+u^2}=2\big[\arctan(u)\big]_0^{+\infty}=\pi$$
   $$\boxed{I=\pi}$$

2. Étude de l'intégrale J :
   (a) La fonction $x\mapsto\dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}(1+x)}$ est continue et négative sur $]0,1]$ et de plus :
   $$x^{3/4}\times\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}(1+x)}=\frac{x^{1/4}\ln(x)}{1+x}\underset{x\to0}{\longrightarrow}0$$
   En effet, par croissances comparées, on a $x^{1/4}\ln(x)\underset{x\to0}{\longrightarrow}0$. Ceci prouve que :
   $$\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}(1+x)}\underset{x\to0}{=}o\Big(\frac{1}{x^{3/4}}\Big)$$
   Il existe donc $c>0$ tel que pour tout $x\in]0,c]$, on a $\left|\dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}(1+x)}\right|\leqslant\dfrac{1}{x^{3/4}}$. Comme $\displaystyle\int_0^c\frac{\mathrm{d}x}{x^{3/4}}$ est convergente, alors $\displaystyle\int_0^c\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}(1+x)}$ converge (absolument). D'où :
   $$\boxed{\text{L'intégrale } J_1=\int_0^1\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}(1+x)}\,\mathrm{d}x\text{ est convergente.}}$$
   (b) La fonction $x\mapsto\dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}(1+x)}$ est continue et positive sur $[1,+\infty[$ et de plus :
   $$x^{5/4}\times\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}(1+x)}\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{\ln(x)}{x^{1/4}}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0\text{ (par croissances comparées.)}$$

Ceci prouve que :

$$\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}(1+x)} \underset{x\to+\infty}{=} o\Big(\frac{1}{x^{5/4}}\Big)$$

Il existe donc $c>0$ tel que pour tout $x \geqslant c$, on a $0 \leqslant \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}(1+x)} \leqslant \dfrac{1}{x^{5/4}}$. Comme $\displaystyle\int_c^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{5/4}}$ est convergente, alors $\displaystyle\int_c^{+\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}(1+x)}$ converge également. D'où :

$$\boxed{\text{L'intégrale } J_2 = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}(1+x)}\,\mathrm{d}x \text{ est convergente.}}$$

L'intégrale J est donc convergente en ses deux bornes :

$$\boxed{\text{L'intégrale } J \text{ est convergente.}}$$

(c) Appliquons à cette intégrale le changement de variable $u = 1/x$ (c'est à dire $x = 1/u$, $\mathrm{d}x = -1/u^2\,\mathrm{d}u$). Celui-ci est valable car $u \mapsto \frac{1}{u}$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ strictement décroissante de $]0,1[$ dans $]1,+\infty[$:

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_{+\infty}^{1} \frac{\ln(1/u)}{\frac{1}{\sqrt{u}}(1+\frac{1}{u})} \times \Big(-\frac{1}{u^2}\,\mathrm{d}u\Big) = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1/u)}{\frac{1}{\sqrt{u}}(1+\frac{1}{u})} \times \frac{1}{u^2}\,\mathrm{d}u \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{-\ln(u)}{\frac{u}{\sqrt{u}}(u+\frac{u}{u})}\,\mathrm{d}u = -\int_1^{+\infty} \frac{\ln(u)}{\sqrt{u}(1+u)} \end{aligned}$$

On reconnaît l'expression de J_2 :

$$\boxed{J_1 = -J_2}$$

Il vient : $J = J_1 + J_2 = -J_2 + J_2 = 0$.

$$\boxed{J = 0}$$

3. Étude de l'intégrale K :

(a) Par croissances comparées, on sait que $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x}\ln(x) = 0$, donc :

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}\ln(x)}{1+x} = 0}$$

De plus : $\dfrac{\sqrt{x}\ln(x)}{1+x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = 0$ par croissances comparées. D'où :

$$\boxed{\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x}\ln(x)}{1+x} = 0}$$

On admet la convergence de l'intégrale K.

(b) On effectue l'intégration par parties suivante :

$$\begin{aligned} u(x) &= \sqrt{x}\ln(x) & \text{et} \quad v'(x) &= \frac{1}{(1+x)^2} \\ u'(x) &= \frac{\ln(x)}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} & v(x) &= -\frac{1}{1+x} \end{aligned}$$

valable car $u(x)v(x) = -\dfrac{\sqrt{x}\ln(x)}{1+x}$ a des limites finies (nulles) en 0 et en $+\infty$ d'après la question qui précède, on a :

$$K = \Big[-\frac{\sqrt{x}\ln(x)}{1+x}\Big]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \Big[\frac{\ln(x)}{2\sqrt{x}(1+x)} + \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\Big]\,\mathrm{d}x$$

Le terme entre crochets est nul, et l'intégrale se sépare en deux intégrales convergentes qu'on reconnaît :

$$\boxed{K = \frac{1}{2}J + I}$$

Avec les calculs effectués aux questions 1 et 2, on a :

$$\boxed{K = \pi}$$

Correction de l'exercice 8 ▲

1. La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin^2(t)}{t^2}$ est continue et positive sur $]0, +\infty[$.

   ⋆ Au voisinage de 0, on peut procéder par équivalences :
$$\frac{\sin^2(t)}{t^2} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t^2}{t^2} \underset{t\to 0}{\sim} 1$$
   Donc $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin^2(t)}{t^2} = 1$, et la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin^2(t)}{t^2}$ se prolonge par continuité en 0, ainsi :
$$\int_0^1 \frac{\sin^2(t)}{t^2}\mathrm{d}t \text{ est convergente.}$$
   ⋆ Pour $t \geqslant 1$, on peut majorer :
$$\frac{\sin^2(t)}{t^2} \leqslant \frac{1}{t^2}$$
   et on sait que $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ est convergente. On en déduit que :
$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\mathrm{d}t \text{ est convergente.}$$
   On conclut :
$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\mathrm{d}t \text{ est convergente.}}$$

2. Effectuons une intégration par parties en posant :
$$\begin{aligned} u(t) &= \sin^2(t) & \text{et} \quad v'(t) &= \frac{1}{t^2} \\ u'(t) &= 2\cos(t)\sin(t) & v(t) &= -\frac{1}{t} \end{aligned}$$
   Cette dernière a un sens car :
$$u(t)v(t) = -\frac{\sin^2 t}{t} \underset{t\to 0}{\sim} -t, \qquad \text{donc : } u(t)v(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$$
$$|u(t)v(t)| = \frac{\sin^2 t}{t} \leqslant \frac{1}{t}, \qquad \text{donc : } u(t)v(t) \underset{t\to +\infty}{\longrightarrow} 0$$
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\mathrm{d}t = \left[-\frac{\sin^2 t}{t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{2\sin(t)\cos(t)}{t}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{2\sin(t)\cos(t)}{t}\mathrm{d}t$$
   Ensuite, par le changement de variable $t \mapsto u = 2t$:
$$\int_0^{+\infty} \frac{2\sin(t)\cos(t)}{t}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{2\sin(u/2)\cos(u/2)}{u/2}\frac{\mathrm{d}u}{2} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u$$
   En résumé :
$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{2\sin(t)\cos(t)}{t}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t\ .}$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :
$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(nt)}{t^2}\mathrm{d}t$$
   On effectue le changement de variables $t \mapsto u = nt$:
$$I_n = \int_0^{\frac{n\pi}{2}} \frac{\sin^2(u)}{\left(\frac{u}{n}\right)^2}\frac{\mathrm{d}u}{n} = n\int_0^{\frac{n\pi}{2}} \frac{\sin^2(u)}{u^2}\mathrm{d}u$$

On peut par suite exprimer :

$$\frac{I_n}{n} = \int_0^{\frac{n\pi}{2}} \frac{\sin^2(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u$$

Avec la relation de la question précédente, on obtient finalement :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{I_n}{n} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t\ .}$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$A_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(nt)}{\sin^2(t)}\mathrm{d}t\ .$$

Il est immédiat que :

$$\boxed{A_0 = 0 \quad \text{et} \quad A_1 = \frac{\pi}{2}}$$

5. (a) Soient $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \sin(a+b)\sin(a-b) &= \big(\sin a\cos b + \sin b\cos a\big)\big(\sin a\cos b - \sin b\cos a\big) \\ &= \sin^2 a\cos^2 b - \sin^2 b\cos^2 a = \sin^2 a(1-\sin^2 b) - \sin^2 b(1-\sin^2 a) \\ &= \sin^2 a - \sin^2 b \end{aligned}$$

$$\boxed{\sin(a+b)\sin(a-b) = \sin^2 a - \sin^2 b}$$

6. On reconnaît deux différences de carrés afin d'exploiter la relation précédente :

$$\begin{aligned} \sin^2(nt) - 2\sin^2((n+1)t) + \sin^2((n+2)t) &= \big(\sin^2((n+2)t) - \sin^2((n+1)t))\big) \\ &\quad -\big(\sin^2((n+1)t) - \sin^2(nt)\big) \\ &= -\sin((2n+1)t)\sin t + \sin((2n+3)t)\sin t \\ \sin^2(nt) - 2\sin^2((n+1)t) + \sin^2((n+2)t) &= \sin t\,[\sin((2n+3)t) - \sin((2n+1)t] \end{aligned}$$

On conclut avec la relation $\sin p - \sin q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$:

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sin^2(nt) - 2\sin^2((n+1)t) + \sin^2((n+2)t) = 2\sin^2(t)\cos(2(n+1)t)\ .}$$

En divisant les deux membre de cette égalité par $\sin^2(t)$ on obtient, pour tout $t \in]0, \pi/2]$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{\sin^2(nt)}{\sin^2(t)} - 2\frac{\sin^2((n+1)t)}{\sin^2(t)} + \frac{\sin^2((n+2)t)}{\sin^2(t)} = 2\cos(2(n+1)t)$$

L'égalité se conserve par passage à l'intégrale entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ (les intégrales sont toutes convergentes) :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(nt)}{\sin^2(t)}\,\mathrm{d}t - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2((n+1)t)}{\sin^2(t)}\,\mathrm{d}t + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2((n+2)t)}{\sin^2(t)}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2(n+1)t)\,\mathrm{d}t$$

On reconnaît ainsi :

$$A_n - 2A_{n+1} + A_{n+2} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2(n+1)t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\sin(2(n+1)t)}{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad A_n - 2A_{n+1} + A_{n+2} = 0.}$$

7. On va établir, par une récurrence à deux pas, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = n\dfrac{\pi}{2}$:
   - ⋆ C'est vrai pour $n = 0$ et $n = 1$ d'après la question 4.
   - ⋆ Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose que $A_n = n\frac{\pi}{2}$ et que $A_{n+1} = (n+1)\frac{\pi}{2}$. D'après la relation prouvée à la question précédente :

     $$A_{n+2} = 2A_{n+1} - A_n = 2(n+1)\frac{\pi}{2} - n\frac{\pi}{2} = (n+2)\frac{\pi}{2}$$

     La relation est donc vérifiée au rang $n+2$.

   Par récurrence, on a :

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ A_n = n\frac{\pi}{2}.}$$

8. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$B_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(nt)}{\tan^2(t)}\mathrm{d}t\,.$$

$$\begin{aligned}
A_n - B_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(nt)\left(\frac{1}{\sin^2(t)} - \frac{1}{\tan^2 t}\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(nt)\frac{1-\cos^2(t)}{\sin^2(t)}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(nt)\frac{\sin^2(t)}{\sin^2(t)}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos(2nt))\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Achevons le calcul : $A_n - B_n = \dfrac{1}{2}\left[t - \dfrac{\sin(2nt)}{2n}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{\pi}{4}$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad A_n - B_n = \frac{\pi}{4}}$$

9. (a) On pose, pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$:

$$g(x) = x - \sin x \quad \text{et} \quad h(x) = \tan x - x$$

On a, en dérivant :

$$g'(x) = 1 - \cos x \geqslant 0 \quad \text{et} \quad h'(x) = 1 + \tan^2 x - 1 = \tan^2 x \geqslant 0$$

Les fonctions g et h sont croissantes sur $[0, \frac{\pi}{2}[$, et comme $g(0) = h(0) = 0$, on en déduit qu'elles sont positives sur cet intervalle. Autrement dit :

$$\boxed{\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[, \quad \sin(x) \leqslant x \leqslant \tan(x)}$$

(b) Pour tout $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on en déduit que $\sin^2(t) \leqslant t^2 \leqslant \tan^2(t)$ (car $\sin(t) > 0$), d'où :

$$\frac{1}{\tan^2(t)} \leqslant \frac{1}{t^2} \leqslant \frac{1}{\sin^2(t)}, \quad \text{et donc pour } n \in \mathbb{N} : \frac{\sin^2(nt)}{\tan^2(t)} \leqslant \frac{\sin^2(nt)}{t^2} \leqslant \frac{\sin^2(nt)}{\sin^2(t)}$$

Les inégalités se conservant par passage aux intégrales entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, on conclut :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad B_n \leqslant I_n \leqslant A_n.}$$

10. Remarquons d'après la question 3, que trouver la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$ revient à trouver la limite de $\dfrac{I_n}{n}$. Or l'inégalité prouvée à la question précédente, combinée à la relation trouvée à la question 8, donne :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad A_n - \frac{\pi}{4} \leqslant I_n \leqslant A_n$$

On utilise alors l'expression de A_n trouvée à la question 7 :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad n\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \leqslant I_n \leqslant n\frac{\pi}{2}, \qquad \text{soit :} \quad \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4n} \leqslant \frac{I_n}{n} \leqslant \frac{\pi}{2}$$

et on obtient, par le théorème des gendarmes $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = \frac{\pi}{2}$. En conclusion :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\,.}$$

Correction de l'exercice 9 ▲

Le but de l'exercice est l'étude de la fonction f définie par la formule suivante :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-2t}\sqrt{1+x^2e^{2t}}\,\mathrm{d}t$$

1. **Domaine de définition de f :**
   (a) C'est une question de cours ! La fonction $t \mapsto e^{-at}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et pour $x>0$, on a :

   $$\int_0^x e^{-at}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{a}e^{-at}\right]_0^x = \frac{1}{a}\left[1-e^{-ax}\right] \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{a}$$

   $$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-at}\,\mathrm{d}t \text{ est convergente et vaut } \frac{1}{a}.}$$

   (b) Soit x un réel fixé. Pour établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-2t}\sqrt{1+x^2e^{2t}}\,\mathrm{d}t$, on va distinguer deux cas :

   $\star$ $x=0$: Il s'agit de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-2t}\,\mathrm{d}t$, et on sait qu'elle converge d'après la question qui précède.

   $\star$ $x\neq 0$: La fonction $t\mapsto e^{-2t}\sqrt{1+x^2e^{2t}}$ est continue et positive sur $[0,+\infty[$, et on a au voisinage de $+\infty$:

   $$1+x^2e^{2t} \underset{t\to+\infty}{\sim} x^2e^{2t}, \quad \text{d'où :} \quad e^{-2t}\sqrt{1+x^2e^{2t}} \underset{t\to+\infty}{\sim} e^{-2t}\sqrt{x^2e^{2t}} \underset{t\to+\infty}{\sim} xe^{-t}$$

   On sait que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge, d'où la convergence de l'intégrale.

   En conclusion :

   $$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-2t}\sqrt{1+x^2e^{2t}}\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

   Remarque : on aurait également pu traiter les deux cas en un seul avec la majoration :

   $$e^{-2t}\sqrt{1+x^2e^{2t}} \leqslant e^{-2t}\sqrt{(1+x^2)e^{2t}} = e^{-t}\sqrt{1+x^2}$$

   (c) De par la question qui précède :

   $$\boxed{f \text{ est définie sur } \mathbb{R}.}$$

   De plus pour tout réel x,

   $$f(-x) = \int_0^{+\infty} e^{-2t}\sqrt{1+(-x)^2e^{2t}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-2t}\sqrt{1+x^2e^{2t}}\,\mathrm{d}t = f(x)$$

   $$\boxed{\text{La fonction } f \text{ et paire (et l'étude peut être faite sur } [0,+\infty[)}$$

2. **Branche infinie de la courbe représentative de f :**
   (a) i. Soit $x>0$ et $t\geqslant 0$:

   On a clairement $1+x^2e^{2t}\geqslant x^2e^{2t}$, donc :

   $$\sqrt{1+x^2e^{2t}} \geqslant \sqrt{x^2e^{2t}} = xe^t$$

   D'autre part :

   $$\left(xe^t+\frac{e^{-t}}{2x}\right)^2 = x^2e^{2t}+1+\frac{e^{-2t}}{4x^2} \geqslant x^2e^{2t}+1$$

   Donc $\displaystyle\sqrt{\left(xe^t+\frac{e^{-t}}{2x}\right)^2} = xe^t+\frac{e^{-t}}{2x} \geqslant \sqrt{1+x^2e^{2t}}$, et en résumé :

   $$\boxed{\forall x>0, \forall t\geqslant 0, \quad xe^t \leqslant \sqrt{1+x^2e^{2t}} \leqslant xe^t+\frac{e^{-t}}{2x}}$$

ii. Soit $x > 0$. Pour tout $t \geqslant 0$, on a alors :

$$xe^{-t} \leqslant e^{-2t}\sqrt{1+x^2e^{2t}} \leqslant xe^{-t} + \frac{e^{-3t}}{2x}$$

Par la propriété de croissance de l'intégrale, on a :

$$x\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-2t}\sqrt{1+x^2e^{2t}}\,\mathrm{d}t \leqslant x\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2x}\int_0^{+\infty} e^{-3t}\,\mathrm{d}t$$

En effet, on sait d'après la question 1a que ces intégrales convergent, et leur calcul (déjà effectué) donne les inégalités :

$$\boxed{\forall x > 0,\ x \leqslant f(x) \leqslant x + \frac{1}{6x}}$$

(b) Ainsi pour tout $x > 0$, on a l'encadrement :

$$0 \leqslant f(x) - x \leqslant \frac{1}{6x}, \quad \text{ce qui entraîne :} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) - x = 0$$

Autrement dit : La courbe représentative de f admet une asymptote d'équation $y = x$ au voisinage de $+\infty$.

3. **Dérivabilité et monotonie de f :**

(a) Soit g une fonction continue sur $]0,+\infty[$ telle que $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ existe. Alors pour $x > 0$:

$$\begin{aligned} H(x) &= \int_x^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^1 g(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t \\ &= -\int_1^x g(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

D'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction $G : x \mapsto \displaystyle\int_1^x g(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$, et il s'agit de l'unique primitive de g qui s'annule en 1, d'où :

$$\forall x > 0, \quad G'(x) = g(x)$$

Comme $H(x) = -G(x) + C^{te}$, on peut conclure :

$$\boxed{H : x \mapsto \int_x^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0,+\infty[, \text{ et } H'(x) = -g(x).}$$

(Nb : petite coquille dans l'énoncé, à corriger).

(b) Soit $x > 0$. On effectue le changement de variable $t \mapsto u = xe^t$ ($\mathrm{d}u = xe^t\,\mathrm{d}t$). Il s'agit d'une bijection strictement croissante de $[0,+\infty[$ dans $[x,+\infty[$, donc on peut écrire :

$$f(x) = x^2\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{1+(xe^t)^2}}{(xe^t)^3}(xe^t)\,\mathrm{d}t = x^2\int_x^{+\infty}\frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,\mathrm{d}u$$

$$\boxed{f(x) = x^2\int_x^{+\infty}\frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,\mathrm{d}u}$$

(c) D'après la question 3a, la fonction f est un produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0;+\infty[$, donc il s'agit d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0;+\infty[$. De plus pour $x > 0$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x\int_x^{+\infty}\frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,\mathrm{d}u - x^2 \times \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^3}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{2f(x) - \sqrt{1+x^2}}{x} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x > 0, \quad f'(x) = \frac{2f(x) - \sqrt{1+x^2}}{x}}$$

(d) Procédons à une intégration par parties à partir de l'expression de f trouvée en 3b :

$$g(u) = \sqrt{1+u^2} \quad \text{et} \quad h'(u) = \frac{1}{u^3}$$
$$g'(u) = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} \qquad h(u) = -\frac{1}{2u^2}$$

Celle-ci est valable car $g(u)h(u) = -\frac{1}{2u}\sqrt{1+\frac{1}{u^2}} \underset{u\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

$$f(x) = x^2\left[\frac{-\sqrt{1+u^2}}{2u^2}\right]_x^{+\infty} + x^2\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{2u\sqrt{1+u^2}}$$

Après calcul, on a :

$$\boxed{2f(x) = \sqrt{1+x^2} + x^2\int_x^{+\infty}\frac{1}{u\sqrt{1+u^2}}\,\mathrm{d}u}$$

(e) Si on substitue cette valeur de $2f(x)$ dans l'expression trouvée à la question 3c, on obtient une nouvelle expression de $f'(x)$:

$$\forall x > 0, \qquad f'(x) = x\int_x^{+\infty}\frac{1}{u\sqrt{1+u^2}}\,\mathrm{d}u$$

Grâce à cette expression, il est clair que $f'(x) > 0$ pour tout $x > 0$ (la fonction intégrée est continue, positive et non nulle sur $]0,+\infty[$), et on conclut :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est strictement croissante sur }]0,+\infty[.}$$

4. **Étude locale de f et f' en 0 :**

(a) Procédons à une autre intégration par parties :

$$g(u) = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \quad \text{et} \quad h'(u) = \frac{1}{u}$$
$$g'(u) = -\frac{u}{(1+u^2)^{3/2}} \qquad h(u) = \ln u$$

Valable car $g(u)h(u) = \frac{\ln u}{\sqrt{1+u^2}} \underset{u\to+\infty}{\sim} \frac{\ln u}{u}$ et $\lim_{u\to+\infty}\frac{\ln u}{u} = 0$ par croissances comparées.

$$\int_x^{+\infty}\frac{1}{u\sqrt{1+u^2}}\,\mathrm{d}u = \left[\frac{\ln u}{\sqrt{1+u^2}}\right]_x^{+\infty} + \int_x^{+\infty}\frac{u\ln u}{(1+u^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}u$$

On finit le calcul :

$$\boxed{\int_x^{+\infty}\frac{1}{u\sqrt{1+u^2}}\,\mathrm{d}u = -\frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}} + \int_x^{+\infty}\frac{u\ln u}{(1+u^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}u}$$

On sait déjà par ce calcul que pour tout $x > 0$, l'intégrale $\int_x^{+\infty}\frac{u\ln u}{(1+u^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}u$ est convergente. De plus, la fonction $u \mapsto \frac{u\ln u}{(1+u^2)^{3/2}}$ se prolonge par continuité en 0, puisque :

$$\frac{u\ln u}{(1+u^2)^{3/2}} \underset{u\to 0}{\sim} u\ln u$$

et $u\ln u \underset{u\to 0}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées. On en déduit que :

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty}\frac{u\ln u}{(1+u^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}u \text{ est convergente.}}$$

(b) Avec les questions 3d, 3c et 4a, on obtient deux autres expressions de $f'(x)$ et de $f(x)$:

$$f'(x) = x\left[-\frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}} + \int_x^{+\infty}\frac{u\ln u}{(1+u^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}u\right]$$
$$f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{1+x^2} - \frac{1}{2}\frac{x^2\ln x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{2}x^2\int_x^{+\infty}\frac{u\ln u}{(1+u^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}u$$

Comme $-\dfrac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}} \underset{x\to 0^+}{\sim} -\ln x$ et que $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{u\ln u}{(1+u^2)^{3/2}}\,du$ a une limite finie lorsque x tend vers 0, on en déduit que :

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -x\ln x}$$

De plus, $\dfrac{1}{2}\sqrt{1+x^2} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{x^2}{4} + o(x^2)$, donc :

$$f(x) - \frac{1}{2} = x^2\left[\frac{1}{4} + o(1) - \frac{1}{2}\frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{2}\int_x^{+\infty} \frac{u\ln u}{(1+u^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}u\right]$$

Et de même que précédemment, on trouve :

$$\boxed{f(x) - \frac{1}{2} \underset{x\to 0^+}{\sim} -\frac{x^2\ln x}{2}}$$

(c) Comme $\displaystyle\lim_{x\to 0} -\frac{x^2\ln x}{2}$, on en déduit que

$$\boxed{f(0) = \frac{1}{2}}$$

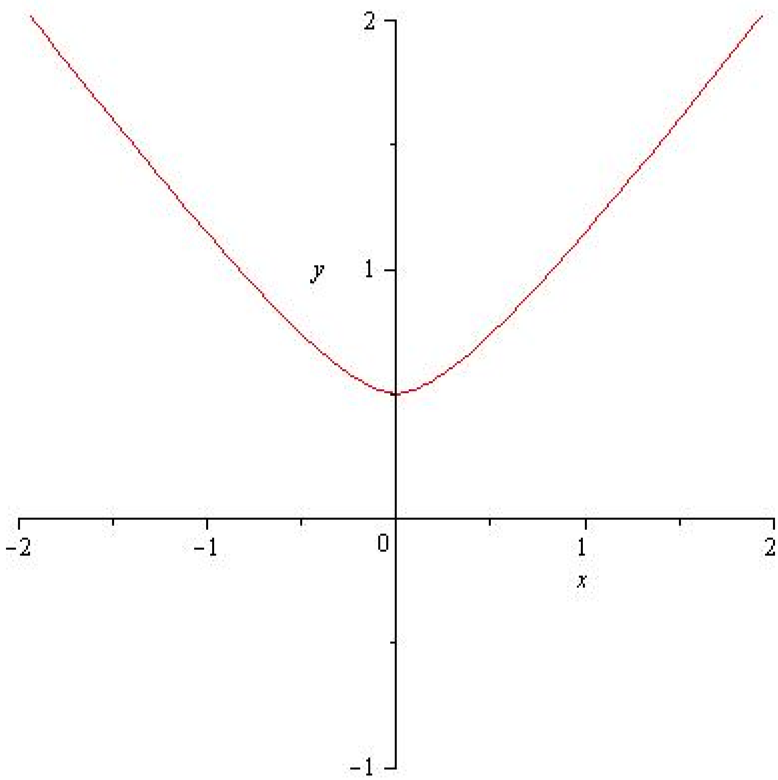
car . f est une fonction continue sur $[0,+\infty[$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, et de plus :

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} -x\ln x = 0 \quad \text{par croissances comparées.}$$

Par le théorème de prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, on en conclut que :

$$\boxed{f \text{ est une fonction de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0,+\infty[\text{ et } f'(0) = 0.}$$

(d) On peut maintenant représenter f sur $\mathbb{R}$:



Correction de l'exercice 10 ▲

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^n(x+1)}$.

1. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^n(x+1)}$ est continue et positive sur $[1, +\infty[$ et de plus on a, au voisinage de $+\infty$:

$$\frac{1}{x^n(x+1)} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{x^{n+1}}$$

Or $n+1 \geqslant 2 > 1$, donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{n+1}}$ converge, et on en déduit que :

$$\boxed{\text{L'intégrale } I_n \text{ est convergente pour tout } n \in \mathbb{N}^*.}$$

2. (a) On procède par identification des numérateurs :

$$\frac{a}{x} - \frac{b}{x+1} = \frac{(a-b)x+a}{x(x+1)} = \frac{1}{x(x+1)}$$

si et seulement si $a - b = 0$ et $a = 1$, i.e. $a = b = 1$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} - \{-1, 0\}, \quad \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}$$

(b) Pour le calcul de I_1, attention au problème de convergence qui peut apparaître par séparation de l'intégrale :

$$\int_1^X \frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)} = \int_1^X \frac{\mathrm{d}x}{x} - \int_1^X \frac{\mathrm{d}x}{x+1} = \ln X - \ln(X+1) + \ln 2 = \ln 2 - \ln\left(1 + \frac{1}{X}\right) \underset{X \to +\infty}{\longrightarrow} \ln 2$$

$$\boxed{I_1 = \ln 2}$$

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$. Il est clair que $I_n \geqslant 0$ (intégrale d'une fonction positive), et de plus :

$$\forall x \in [1, +\infty[, \quad \frac{1}{x^n(x+1)} \leqslant \frac{1}{2x^n}$$

Puisque $n \geqslant 2$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^n}$ converge et :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^n(x+1)} \leqslant \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^n} = \frac{1}{2} \left[\frac{x^{-n+1}}{-n+1} \right]_1^{+\infty} = \frac{1}{2(n-1)}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ n \geqslant 2, \quad 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{2(n-1)}}$$

(b) Par le théorème des gendarmes, la suite (I_n) converge et

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} I_n = 0}$$

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} I_n + I_{n+1} &= \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^n(x+1)} + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{n+1}(x+1)} = \int_1^{+\infty} \frac{(x+1)\,\mathrm{d}x}{x^{n+1}(x+1)} \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{n+1}} = \left[\frac{x^{-n}}{-n} \right]_1^{+\infty} = \frac{1}{n} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n}}$$

(b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$I_{n+1} - I_n = \int_1^{+\infty} \frac{(1-x)\,\mathrm{d}x}{x^{n+1}(x+1)} \leqslant 0$$

En effet, la fonction $x \mapsto \dfrac{1-x}{x^{n+1}(x+1)}$ est négative sur $[1, +\infty[$. En conclusion :

$$\boxed{\text{La suite } (I_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est décroissante.}}$$

(c) Les questions 4a, 4b et 3a permettent d'en déduire les inégalités qui suivent :

$$\frac{1}{n} = I_{n+1} + I_n \leqslant 2I_n \leqslant \frac{1}{n-1}$$

Les termes de part et d'autre sont équivalents à $\dfrac{1}{n}$ lorsque n tend vers $+\infty$, d'où :

$$\boxed{I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}}$$

La série $\sum \dfrac{1}{n}$ est la série harmonique (divergente), donc :

$$\boxed{\sum I_n \text{ est une série divergente.}}$$

5. Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $J_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^n(x+1)^2}$.

(a) La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^n(x+1)^2}$ est continue et positive sur $[1, +\infty[$ et de plus on a, au voisinage de $+\infty$:

$$\frac{1}{x^n(x+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^{n+2}}$$

Or $n+2 \geqslant 2 > 1$, donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{n+2}}$ converge, et on en déduit que :

$$\boxed{\text{L'intégrale } J_n \text{ est convergente pour tout } n \in \mathbb{N}.}$$

(b) Pour $n = 0$, on trouve :

$$J_0 = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2} = \left[-\frac{1}{x+1}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{J_0 = \frac{1}{2}}$$

6. (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} J_k + J_{k-1} &= \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^k(x+1)^2} + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{k-1}(x+1)^2} = \int_1^{+\infty} \frac{(1+x)\,\mathrm{d}x}{x^k(x+1)^2} \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^k(x+1)} = I_k \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad J_k + J_{k-1} = I_k}$$

(b) Cette dernière expression permet de simplifier la somme qui suit :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} I_k &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}(J_k + J_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} J_k + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} J_{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} J_k + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k} J_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} J_k - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k-1} J_k = (-1)^{n-1} J_n + J_0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} I_k = \frac{1}{2} + (-1)^{n-1} J_n}$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^n}$ converge et :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^n(x+1)^2} \leqslant \frac{1}{2^2}\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^n} = \frac{1}{4}\left[\frac{x^{-n+1}}{-n+1}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{4(n-1)}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\quad n \geqslant 2, \quad 0 \leqslant J_n \leqslant \frac{1}{4(n-1)}}$$

Par le théorème des gendarmes :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} J_n = 0}$$

(d) La question 6b permet de conclure :

$$\boxed{\text{La série de terme général } (-1)^{n-1}I_n \text{ est convergente et } \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}I_k = \frac{1}{2}}$$

Correction de l'exercice 11 ▲

Partie I : cas $n = 1$.

On étudie dans cette partie la convergence de $I_{1,\alpha} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$.

1. La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t^\alpha}$ est continue et positive sur $]0,1]$. De plus, au voisinage de 0, on a l'équivalence :

$$\frac{\sin t}{t^\alpha} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t}{t^\alpha} = \frac{1}{t^{\alpha-1}}$$

On en déduit que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ est convergente si et seulement si $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^{\alpha-1}}\,\mathrm{d}t$ est convergente, c'est à dire si et seulement si $\alpha - 1 < 1$ ie $\alpha < 2$.

$$\boxed{\int_0^1 \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \text{ converge si et seulement si } \alpha < 2.}$$

2. On suppose *dans cette question* que $\alpha > 1$.

2.a La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t^\alpha}$ est continue sur $[1,+\infty[$. Au voisinage de $+\infty$, on a la majoration :

$$\left|\frac{\sin t}{t^\alpha}\right| \leqslant \frac{1}{t^\alpha}$$

Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge car $\alpha > 1$; On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t^\alpha}\right|\mathrm{d}t$ converge, c'est à dire que :

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \text{ est absolument convergente (donc convergente).}}$$

2.b En rassemblant les résultats de la question 1 et de la question précédente, on peut conclure que :

$$\boxed{\text{Si } 1 < \alpha < 2, \text{ l'intégrale } I_{1,\alpha} \text{ converge et si } \alpha \geqslant 2, \text{ l'intégrale } I_{1,\alpha} \text{ diverge .}}$$

3. On suppose *dans cette question* que $0 < \alpha \leqslant 1$.

3.a Considérons $\displaystyle\int_1^x \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$, à l'aide de l'intégration par parties suivante :

$$\begin{array}{lll} u(t) = \dfrac{1}{t^\alpha} & \text{et} & v'(t) = \sin t \\ u'(t) = -\dfrac{\alpha}{t^{\alpha+1}} & & v(t) = -\cos t \end{array}$$

$$\begin{aligned} \int_1^x \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t &= \left[-\frac{\cos t}{t^\alpha}\right]_1^x - \alpha\int_1^x \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t \\ &= \cos 1 - \frac{\cos x}{x^\alpha} - \alpha\int_1^x \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Examinons ensuite les différentes convergences :

- $\star$ $\left|\dfrac{\cos x}{x^\alpha}\right| \leqslant \dfrac{1}{x^\alpha} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cos x}{x^\alpha} = 0$.
- $\star$ L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t$ est (absolument) convergente car :

$$\left|\frac{\cos t}{t^{\alpha+1}}\right| \leqslant \frac{1}{t^{\alpha+1}} \text{ avec } \alpha+1>1$$

ce qui signifie que $\displaystyle\int_1^{x} \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t$ a une limite finie en $+\infty$.

En résumé, $\displaystyle\int_1^{x} \frac{\sin t}{t^{\alpha}}\,\mathrm{d}t$ est somme d'expressions de limites finies en $+\infty$, donc a une limite finie en $+\infty$. Autrement dit :

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{\alpha}}\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

3.b En rassemblant les résultats de la question 1 et de la question précédente, on peut conclure que :

$$\boxed{\text{Si } 0<\alpha\leqslant 1, \text{ l'intégrale } I_{1,\alpha} \text{ converge.}}$$

3.c On considère la série de terme général $u_k = \displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin t}{t^{\alpha}}\,\mathrm{d}t$.

3.d Soit $k\in\mathbb{N}$. Remarquons simplement que la fonction $t\mapsto \dfrac{\sin t}{t^\alpha}$ est de signe constant sur $[k\pi,(k+1)\pi]$, et plus précisément positif si k est pair et négatif si k est impair, c'est à dire du signe de $(-1)^k$. On peut donc écrire :

$$\forall t\in[k\pi,(k+1)\pi],\quad \frac{\sin t}{t^\alpha} = (-1)^k\left|\frac{\sin t}{t^\alpha}\right|$$

Par passage à l'intégrale entre $k\pi$ et $(k+1)\pi$, on trouve l'égalité :

$$\boxed{u_k = (-1)^k \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left|\frac{\sin t}{t^\alpha}\right|\mathrm{d}t}$$

3.e On sait avec la question précédente que pour $k\in\mathbb{N}^*$, $|u_k| = \displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left|\frac{\sin t}{t^\alpha}\right|\mathrm{d}t$.

De plus pour $t\in[k\pi,(k+1)\pi]$, on a :

$$\frac{1}{(k+1)^\alpha\pi^\alpha} \leqslant \frac{1}{t^\alpha} \leqslant \frac{1}{k^\alpha\pi^\alpha},\quad \text{donc : } \frac{|\sin t|}{(k+1)^\alpha\pi^\alpha} \leqslant \frac{|\sin t|}{t^\alpha} \leqslant \frac{|\sin t|}{k^\alpha\pi^\alpha}$$

On passe ensuite à l'intégrale entre $k\pi$ et $(k+1)\pi$:

$$\frac{1}{(k+1)^\alpha\pi^\alpha}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t|\,\mathrm{d}t \leqslant |u_k| \leqslant \frac{1}{k^\alpha\pi^\alpha}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t|\,\mathrm{d}t$$

Il suffit enfin de calculer, en tenant compte du signe constant de la fonction sin sur $[k\pi,(k+1)\pi]$:

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t|\,\mathrm{d}t = \left|\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \sin t\,\mathrm{d}t\right| = \left|\big[-\cos t\big]_{k\pi}^{(k+1)\pi}\right| = |2(-1)^k| = 2$$

En reportant ce calcul, on a prouvé que :

$$\boxed{\text{Pour tout } k\in\mathbb{N}^*,\quad \frac{2}{(k+1)^\alpha\pi^\alpha} \leqslant |u_k| \leqslant \frac{2}{k^\alpha\pi^\alpha}.}$$

3.f Par la relation de Chasles, il est possible d'écrire :

$$\int_\pi^{n\pi} \left|\frac{\sin t}{t^\alpha}\right|\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left|\frac{\sin t}{t^\alpha}\right|\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} |u_k|$$

On réinvestit alors le résultat de la question précédente :

$$\sum_{k=1}^{n} |u_k| \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{(k+1)^\alpha \pi^\alpha} = \frac{2}{\pi^\alpha} \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k^\alpha}$$

La somme $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k^\alpha}$ est une somme partielle d'une série de Riemann divergente (car $\alpha \leqslant 1$), donc admet la limite $+\infty$. En regroupant ces résultats, il est ainsi prouvé que :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \int_\pi^{n\pi} \left| \frac{\sin t}{t^\alpha} \right| \mathrm{d}t = +\infty}$$

La fonction $x \mapsto \displaystyle\int_\pi^x \left| \frac{\sin t}{t^\alpha} \right| \mathrm{d}t$ n'admet donc pas de limite finie lorsque x tend vers $+\infty$. Ceci prouve que :

$$\boxed{\text{Si } 0 < \alpha \leqslant 1, \text{ l'intégrale } I_{1,\alpha} \text{ n'est pas absolument convergente.}}$$

4. On suppose *dans cette question* que $\alpha \leqslant 0$. On considère la suite de terme général $v_n = \displaystyle\int_\pi^{n\pi} \frac{\sin t}{t^\alpha} \mathrm{d}t$.

   Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a, compte-tenu du signe constant de la fonction intégrée (de même que dans la question 3d) :

$$|v_{n+1} - v_n| = \left| \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t^\alpha} \mathrm{d}t \right| = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin t| t^{-\alpha} \, \mathrm{d}t$$

   Et puisque $-\alpha \geqslant 0$, alors pour $t \in [n\pi, (n+1)\pi]$ on a $t^{-\alpha} \geqslant (n\pi)^{-\alpha} \geqslant 1$. Ainsi, par passage à l'intégrale :

$$|v_{n+1} - v_n| \geqslant \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin t| \, \mathrm{d}t = 2$$

   La suite $(v_{n+1} - v_n)$ ne converge pas vers 0, donc la suite (v_n) ne converge pas.

   La fonction $x \mapsto \displaystyle\int_\pi^x \frac{\sin t}{t^\alpha} \mathrm{d}t$ n'a donc pas de limite finie en $+\infty$. Ainsi :

$$\boxed{\text{Si } \alpha \leqslant 0, \text{ l'intégrale } I_{1,\alpha} \text{ diverge.}}$$

Partie II : Cas $n = 3$ et $\alpha = 2$.

1. $I_{3,2} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2} \mathrm{d}t$. On vérifie que :

   - ⋆ La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin^3 t}{t^2}$ est continue sur $]0, +\infty[$.
   - ⋆ Au voisinage de 0 :

$$\frac{\sin^3 t}{t^2} \underset{t \to 0}{\sim} \frac{t^3}{t^2} = t \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0$$

     Donc $t \mapsto \dfrac{\sin^3 t}{t^2}$ se prolonge par continuité en 0, ce qui prouve que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin^3 t}{t^2} \mathrm{d}t$ existe.

   - ⋆ Au voisinage de $+\infty$:

$$\left| \frac{\sin^3 t}{t^2} \right| \leqslant \frac{1}{t^2}$$

     Comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} \mathrm{d}t$ converge, alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2} \mathrm{d}t$ converge absolument, donc converge.

   L'examen des deux bornes d'intégration prouve que :

$$\boxed{\text{L'intégrale } I_{3,2} \text{ converge.}}$$

2. 2.a Soit $f : \left]0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \dfrac{\sin t}{t}$. f est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et sa dérivée vaut :

$$f'(t) = \frac{t \cos t - \sin t}{t^2}$$

Le signe de $f'(t)$ est celui du numérateur. Posons $h(t) = t\cos t - \sin t$, on a :

$$h'(t) = -t\sin t \leqslant 0, \quad \forall t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$$

h est décroissante sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et comme $h(0) = 0$, $h(x)$ (donc $f'(x)$) est de signe négatif sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$. Il est ainsi prouvé que :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est décroissante sur } \left]0, \frac{\pi}{2}\right].}$$

2.b Soient a et $b \in \mathbb{R}$ tels que $0 < a < b$. Soit $F_{a,b}(x) = \displaystyle\int_{ax}^{bx} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

2(b)2.1 On a $F_{a,b}(-x) = \displaystyle\int_{-ax}^{-bx} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t$, et par le changement de variable $u = -t$:

$$F_{a,b}(-x) = \int_{ax}^{bx} \frac{\sin(-t)}{(-t)^2}(-\,\mathrm{d}t) = \int_{ax}^{bx} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t = F_{a,b}(x)$$

Ce calcul montre que :

$$\boxed{\text{La fonction } F_{a,b} \text{ est paire.}}$$

2(b)2.2 On suppose que $x > 0$. D'après la question 2a, la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ est décroissante sur $[ax, bx]$ pour x suffisamment proche de 0, donc on peut écrire :

$$\forall t \in [ax, bx], \quad \frac{\sin bx}{bx} \leqslant \frac{\sin t}{t} \leqslant \frac{\sin ax}{ax}$$

D'où $\forall t \in [ax, bx]$, $\dfrac{\sin bx}{bx} \times \dfrac{1}{t} \leqslant \dfrac{\sin t}{t^2} \leqslant \dfrac{\sin ax}{ax} \times \dfrac{1}{t}$. Par passage à l'intégrale :

$$\frac{\sin bx}{bx} \times \int_{ax}^{bx} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{ax}^{bx} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\sin ax}{ax} \times \int_{ax}^{bx} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$

Après calcul, on a un encadrement de $F_{a,b}(x)$ pour $x > 0$, suffisamment proche de 0 :

$$\frac{\sin bx}{bx} \times \ln\left(\frac{b}{a}\right) \leqslant F_{a,b}(x) \leqslant \frac{\sin ax}{ax} \times \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Comme $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin bx}{bx} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin ax}{ax} = 1$, alors d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{x\to 0^+} F_{a,b}(x) = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Enfin, par la parité de la fonction $F_{a,b}$ prouvée à la question précédente, on conclut à l'égalité des limites à droite et à gauche en 0 :

$$\boxed{\lim_{x\to 0} F_{a,b}(x) = \ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

3. Soit $I(\varepsilon) = \displaystyle\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

3.a Utilisons les formules d'Euler pour linéariser :

$$\begin{aligned}
\sin^3 t &= \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right)^3 = -\frac{1}{8i}\left(e^{3it} - 3e^{it} + 3e^{-it} - e^{-3it}\right) \\
&= -\frac{1}{8i}\left(2i\sin(3t) - 6i\sin t\right)
\end{aligned}$$

En simplifiant, ceci donne :

$$\boxed{\sin^3 t = -\frac{1}{4}\sin(3t) + \frac{3}{4}\sin t}$$

3.b En utilisant cette égalité dans l'expression de $I(\varepsilon)$, on a :

$$I(\varepsilon) \quad = \quad \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{-\frac{1}{4}\sin(3t) + \frac{3}{4}\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{4}\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\sin(3t)}{t^2}\,\mathrm{d}t + \frac{3}{8}\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

On effectue le changement de variable $u = 3t$ dans la première intégrale :

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\sin(3t)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \int_{3\varepsilon}^{+\infty} \frac{\sin(u)}{\left(\frac{u}{3}\right)^2}\frac{\mathrm{d}u}{3} = 3\int_{3\varepsilon}^{+\infty} \frac{\sin u}{u^2}\,\mathrm{d}u$$

Et en reportant ce dernier résultat, on a :

$$I(\varepsilon) \quad = \quad -\frac{3}{4}\int_{3\varepsilon}^{+\infty} \frac{\sin u}{u^2}\,\mathrm{d}u + \frac{3}{4}\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{3}{4}\int_{\varepsilon}^{3\varepsilon} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

On retrouve finalement :

$$\boxed{I(\varepsilon) = \frac{3}{4}F_{1,3}(\varepsilon)}$$

3.c Rappelons que $I_{3,2} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} I(\varepsilon) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{3}{4}F_{1,3}(\varepsilon)$. On conclut avec la question 2(b)2 :

$$\boxed{I_{3,2} = \frac{3\ln 3}{4}}$$

Partie III : Cas $\alpha = n$.

1. Soit $x > 0$, on fait le changement de variable $u = xt$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{\frac{u}{x}}\frac{\mathrm{d}u}{x} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}\,\mathrm{d}u$$

On sait que cette dernière expression vaut $\frac{\pi}{2}$, d'où :

$$\boxed{\forall x > 0, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}}$$

2. On suppose $n \geqslant 2$. La fonction $n \mapsto \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n$ est continue sur $]0, +\infty[$. De plus :

⋆ La fonction $t \mapsto \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n$ se prolonge donc par continuité en 0 car :

$$\left(\frac{\sin t}{t}\right)^n \underset{t\to 0}{\sim} \left(\frac{t}{t}\right)^n = 1$$

ce qui suffit à établir que $\int_0^1 \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n \mathrm{d}t$ converge.

⋆ Au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\left(\frac{\sin t}{t}\right)^n\right| \leqslant \frac{1}{t^n}$$

Comme $n \geqslant 2$, alors $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^n}$ converge, donc $\int_1^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n \mathrm{d}t$ converge absolument, donc converge.

L'examen des bornes en 0 et $+\infty$ nous permet de conclure que :

$$\boxed{\text{Pour } n \text{ supérieur ou égal à 2, l'intégrale } A_n \text{ converge.}}$$

3. $A_2 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t$. On fait l'intégration par parties suivantes :

$$\begin{array}{lll} u(t) = \sin^2 t & \text{et} & v'(t) = \dfrac{1}{t^2} \\ u'(t) = 2\sin t\cos t = \sin(2t) & & v(t) = -\dfrac{1}{t} \end{array}$$

valable car $u(t)v(t) = -\frac{\sin^2 t}{t}$ admet des limites nulles en 0 et en $+\infty$. En effet :

$$u(t)v(t) = -\frac{\sin^2 t}{t} \underset{t\to 0}{\sim} -\frac{t^2}{t} = -t \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et} \quad |u(t)v(t)| = \frac{|\sin^2 t|}{t} \leqslant \frac{1}{t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

ce qui donne :

$$A_2 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2t)}{t}$$

On retrouve l'expression calculée à la question 2 (avec $x = 2$), on en déduit que :

$$\boxed{A_2 = \frac{\pi}{2}}$$

4. $A_4 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 t}{t^4}\,\mathrm{d}t$.

4.a Effectuons une première intégration par parties avec :

$$\begin{array}{lll} u(t) = \sin^4 t & \text{et} & v'(t) = \dfrac{1}{t^4} \\ u'(t) = 4\cos t \sin^3 t & & v(t) = -\dfrac{1}{3t^3} \end{array}$$

valable car on démontre facilement que $u(t)v(t)$ a une limite nulle en 0 et en $+\infty$.

$$A_4 = \frac{4}{3}\int_0^{+\infty} \frac{\cos t \sin^3 t}{t^3}$$

Puis une procède à une seconde intégration par parties avec :

$$\begin{array}{lll} u(t) = \cos t \sin^3 t & \text{et} & v'(t) = \dfrac{1}{t^3} \\ u'(t) = -\sin^4 t + 3\sin^2 t \cos^2 t & & v(t) = -\dfrac{1}{2t^2} \end{array}$$

toujours valable car on démontre aussi que $u(t)v(t)$ a une limite nulle en 0 et en $+\infty$.

$$A_4 = \frac{4}{3}\int_0^{+\infty} \frac{-\sin^4 t + 3\sin^2 t \cos^2 t}{t^2}$$

Enfin : $-\sin^4 t + 3\sin^2 t\cos^2 t = \sin^2 t(\cos^2 t - 1) + 3\sin^2 t \cos^2 t = \sin^2 t(4\cos^2 t - 1)$, d'où :

$$\boxed{A_4 = \frac{2}{3}\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t(4\cos^2 t - 1)}{t^2}\,\mathrm{d}t}$$

4.b En séparant le résultat trouvé en une somme de deux intégrales (convergentes), on a :

$$\begin{aligned} A_4 &= -\frac{2}{3}\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t + \frac{2}{3}\int_0^{+\infty} \frac{4\sin^2 t\cos^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{2}{3}\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t + \frac{2}{3}\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(2t)}{t^2}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

On reconnaît l'expression de A_2 dans la première intégrale. Il reste à faire le changement de variable $u = 2t$ dans la deuxième intégrale :

$$\begin{aligned} A_4 &= -\frac{2}{3}A_2 + \frac{2}{3}\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 u}{\frac{u^2}{4}}\,\frac{\mathrm{d}u}{2} \\ &= -\frac{2}{3}A_2 + \frac{4}{3}A_2 \end{aligned}$$

On a finalement le résultat grâce à la question 3 :

$$\boxed{A_4 = \frac{2}{3}A_2 = \frac{\pi}{3}}$$

Correction de l'exercice 12 ▲

On admet que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u$ est convergente et vaut $\dfrac{\pi}{2}$.

1. On suppose dans un premier temps $a > 0$. Le changement de variable $t = au$ nous donne :
$$I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t/a} \times \frac{\mathrm{d}t}{a} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$
Si $a = 0$, l'intégrale est clairement nulle. Enfin, si $a < 0$, on peut utiliser l'imparité de la fonction sinus et le calcul précédent pour obtenir :
$$I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(au)}{u}\,\mathrm{d}u = -\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\overbrace{(-a)}^{>0}u)}{u} = -\frac{\pi}{2}$$
Les résultats se résument ainsi :
$$\boxed{I(a) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{si } a > 0 \\ 0 & \text{si } a = 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{si } a < 0 \end{cases}}$$

2. (a) La fonction $u \mapsto \dfrac{\sin^2 u}{u^2}$ étant continue et positive sur $]0, +\infty[$, il convient d'examiner le comportement de cette fonction aux bornes de l'intervalle :
   - Au voisinage de 0, on remarque que :
   $$\sin^2 u \underset{u\to 0}{\sim} u^2 \quad \text{et donc que :} \quad \lim_{u\to 0} \frac{\sin^2 u}{u^2} = 1$$
   La fonction $u \mapsto \dfrac{\sin^2 u}{u^2}$ se prolonge ainsi par continuité en 0 ce qui suffit à établir que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin^2 u}{u^2}\,\mathrm{d}u$ converge.
   - Au voisinage de $+\infty$, on peut utiliser l'inégalité :
   $$\forall u > 0, \quad 0 \leqslant \frac{\sin^2 u}{u^2} \leqslant \frac{1}{u^2}$$
   Puisque l'intégrale de référence $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^2}$ est convergente, il vient par comparaison que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2}\,\mathrm{d}u$ existe.

   Pour finir, il reste à conclure que :
   $$\boxed{\text{L'intégrale } J = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2}\,\mathrm{d}u \text{ est convergente.}}$$

   (b) L'idée ici est de se ramener à une intégrale connue, au moyen de l'intégration par parties suivante :
   $$\begin{aligned} f(u) &= \sin^2(u) & \text{et} \quad g'(u) &= \frac{1}{u^2} \\ f'(u) &= 2\sin u \cos u = \sin(2u) & g(u) &= -\frac{1}{u} \end{aligned}$$
   valable car $f(u)g(u) = -\dfrac{\sin^2 u}{u}$ a une limite nulle en 0 et en $+\infty$. En effet :
   $$-\frac{\sin^2 u}{u} \underset{u\to 0}{\sim} -u \underset{u\to 0}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et} \quad \left| -\frac{\sin^2 u}{u} \right| \leqslant \frac{1}{u} \underset{u\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
   On écrit donc :
   $$J = \left[-\frac{\sin^2 u}{u} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2u)}{u}\,\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2u)}{u}\,\mathrm{d}u$$
   On reconnaît l'expression de $I(2)$ et d'après la question 1, il s'ensuit que :
   $$\boxed{J = \frac{\pi}{2}}$$

3. On considère $K(a,b) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(au).\sin(bu)}{u^2}\,\mathrm{d}u$, où a et b sont des réels.

(a) Rappelons la formule suivante, valable pour tous réels a et b :

$$\sin(au).\sin(bu) = \frac{1}{2}\big(\cos\big((a-b)u\big) - \cos\big((a+b)u\big)\big)$$

Cette expression rend possible l'intégration par parties suivante :

$$\begin{array}{lcl} f(u) = \sin(au)\sin(bu) & \text{et} & g'(u) = \dfrac{1}{u^2} \\ f'(u) = -\dfrac{a-b}{2}\sin\big((a-b)u\big) + \dfrac{a+b}{2}\sin\big((a+b)u\big) & & g(u) = -\dfrac{1}{u} \end{array}$$

qui est valable car $f(u)g(u)$ a une limite nulle en 0 et en $+\infty$ (même principe que pour celle de la question 2b). On obtient :

$$\begin{aligned} K(a,b) &= \left[-\frac{\sin(au)\sin(bu)}{u}\right]_0^{+\infty} \\ &\quad + \int_0^{+\infty} \frac{1}{u}\left(-\frac{a-b}{2}\sin\big((a-b)u\big) + \frac{a+b}{2}\sin\big((a+b)u\big)\right)\mathrm{d}u \end{aligned}$$

Le terme entre crochets est nul, et l'intégrale peut être séparée en deux intégrales convergentes :

$$K(a,b) = -\frac{a-b}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\big((a-b)u\big)}{u}\,\mathrm{d}u + \frac{a+b}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\big((a+b)u\big)}{u}\,\mathrm{d}u$$

On reconnaît bien l'expression :

$$\boxed{K(a,b) = \frac{a+b}{2}I(a+b) - \frac{a-b}{2}I(a-b)}$$

(b) Le calcul effectué en 1 donne les résultats suivants, selon la région du plan considérée (il y a 4 régions + les frontières) :

- Si $a-b<0$ et $a+b<0$: $K(a,b) = -b\dfrac{\pi}{2}$.
- Si $a-b<0$ et $a+b=0$: $K(a,b) = a\dfrac{\pi}{2} = -b\dfrac{\pi}{2}$.
- Si $a-b<0$ et $a+b>0$: $K(a,b) = a\dfrac{\pi}{2}$.
- Si $a-b=0$ et $a+b=0$: $K(a,b) = 0$.
- Si $a-b=0$ et $a+b>0$: $K(a,b) = a\dfrac{\pi}{2} = b\dfrac{\pi}{2}$.
- Si $a-b=0$ et $a+b<0$: $K(a,b) = -a\dfrac{\pi}{2} = -b\dfrac{\pi}{2}$.
- Si $a-b>0$ et $a+b<0$: $K(a,b) = -a\dfrac{\pi}{2}$.
- Si $a-b>0$ et $a+b=0$: $K(a,b) = b\dfrac{\pi}{2} = -a\dfrac{\pi}{2}$.
- Si $a-b>0$ et $a+b>0$: $K(a,b) = b\dfrac{\pi}{2}$.

(c) En remarquant que $I(a\pm b) = \mathrm{sgn}(a\pm b)\times\dfrac{\pi}{2}$ pour $a\pm b\neq 0$, soit :

$$\frac{a\pm b}{2}I(a\pm b) = |a\pm b|\times\frac{\pi}{2}$$

il est possible de regrouper les différents cas sous la formule suivante :

$$\boxed{K(a,b) = \big(|a+b| - |a-b|\big)\frac{\pi}{4}}$$

Correction de l'exercice 13 ▲

On note, lorsque cette valeur est définie, $F(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Soit $x > 0$ un réel fixé. La fonction $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ est continue et positive sur $[x, +\infty[$, et pour $t \geqslant x$, on a :

$$\frac{e^{-t}}{t} \leqslant \frac{1}{x} \times e^{-t}$$

La convergence de $\frac{1}{x}\int_x^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t$ entraîne celle de $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t$, et on conclut que :

$$\boxed{F(x) \text{ existe pour tout } x > 0.}$$

2. Soit $x > 0$. Il suffit d'appliquer la relation de Chasles :

$$F(x) = \int_x^1 \frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t$$

Ce qui s'écrit également :

$$\boxed{F(x) = F(1) + \int_x^1 \frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t = F(1) - \int_1^x \frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t}$$

3. $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ est continue sur $]0, +\infty[$, donc d'après le théorème fondamental, la fonction $x \mapsto \int_1^x \frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de cette fonction qui s'annule en 1, d'où :

$$\boxed{F \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0, +\infty[\text{ et } \forall x \in]0, +\infty[,\ F'(x) = -\frac{e^{-x}}{x}.}$$

4. (a) D'après la question 2, F a une limite lorsque x tend vers $+\infty$ et on a :

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = F(1) - \lim_{x \to +\infty} \int_1^x \frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t = F(1) - F(1) = 0$$

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} F(x) = 0}$$

(b) Pour tout $x \in]0, 1]$, pour tout $t \in [x, 1]$, on a $\frac{e^{-t}}{t} \geqslant \frac{e^{-1}}{t}$, et par passage à l'intégrale :

$$\int_x^1 \frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{e}\int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{t} = -\frac{\ln x}{e}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in]0, 1] : \int_x^1 \frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t \geqslant -\frac{\ln x}{e}.}$$

(c) D'après la question précédente :

$$F(x) = F(1) + \int_x^1 \frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t \geqslant F(1) - \frac{\ln x}{e}$$

On sait que $\lim_{x \to 0^+} -\frac{\ln x}{e} = +\infty$, donc par comparaison :

$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} F(x) = +\infty}$$

5. Dans cette question, on cherche à déterminer un équivalent lorsque x tend vers 0 de $F(x)$.

(a) Soit $t \in]0,1]$. La fonction $h : x \mapsto e^{-x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,t]$ et :

$$\forall x \in [0,t], \quad |h'(x)| = e^{-x} \leqslant e^0 = 1$$

On peut appliquer l'inégalité des accroissements finis sur l'intervalle $[0,t]$:

$$\forall t \in]0,1], \quad |e^{-t} - 1| \leqslant 1 \times |t - 0|$$

Autrement dit :

$$\boxed{\forall t \in]0,1], \quad |e^{-t} - 1| \leqslant t}$$

(b) Soit $x \in]0,1]$. On sait que $\ln x = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ d'où :

$$\begin{aligned} \left| \int_x^1 \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t + \ln x \right| &= \left| \int_x^1 \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t + \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \right| \\ &= \left| \int_x^1 \frac{e^{-t} - 1}{t}\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \int_x^1 \frac{|e^{-t} - 1|}{t}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

De plus, en appliquant l'inégalité de la question précédente, on obtient :

$$\int_x^1 \frac{|e^{-t} - 1|}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^1 \frac{t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_x^1 \mathrm{d}t = 1 - x \leqslant 1$$

Résumons :

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in]0,1] : \left| \int_x^1 \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t + \ln x \right| \leqslant 1.}$$

(c) On peut reformuler cette inégalité comme suit :

$$\forall x \in]0,1], \quad -1 - \ln x \leqslant \int_x^1 \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant 1 - \ln x$$

ou encore :

$$\forall x \in]0,1], \quad F(1) - 1 - \ln x \leqslant F(1) + \int_x^1 \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t = F(x) \leqslant F(1) + 1 - \ln x$$

Finalement :

$$\forall x \in]0,1], \quad \frac{1 - F(1)}{\ln x} + 1 \leqslant \frac{F(x)}{-\ln x} \leqslant -\frac{F(1) + 1}{\ln x} + 1$$

Le théorème des gendarmes suffit à conclure que $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{F(x)}{-\ln x} = 1$. Autrement dit :

$$\boxed{F(x) \underset{x \to 0^+}{\sim} -\ln x}$$

6. Dans cette question, on cherche à déterminer un équivalent lorsque x tend vers $+\infty$ de $F(x)$.

(a) Soit $x > 0$. La fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{t^2}$ est continue et positive sur $[x, +\infty[$. De plus, pour tout $t \geqslant x$:

$$0 \leqslant \frac{e^{-t}}{t^2} \leqslant \frac{1}{t^2}$$

Puisque $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge, alors par comparaison $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

$$\boxed{\text{Pour tout } x > 0, \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

(b) Soit $x > 0$. Pour tout $t \in [x, +\infty[$, on a :

$$\frac{e^{-t}}{t^2} \leqslant \frac{e^{-t}}{xt}$$

Par passage à l'intégrale, on obtient :

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{x} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x} F(x)$$

$$\boxed{\text{Pour tout } x > 0, \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{x}F(x).}$$

(c) Procédons à l'intégration par parties suivante :

$$\begin{array}{lcl} u(t) = e^{-t} & \text{et} & v'(t) = \dfrac{1}{t} \\ u'(t) = -e^{-t} & & v(t) = -\dfrac{1}{t^2} \end{array}$$

valable car $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t = \Big[-\frac{e^{-t}}{t^2}\Big]_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{e^{-x}}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Or, d'après la question 6b, on sait que $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{=} o\big(F(x)\big)$, d'où :

$$F(x) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{e^{-x}}{x} + o\big(F(x)\big)$$

ce qu'on peut reformuler ainsi :

$$\boxed{F(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x}}$$

Correction de l'exercice 14 ▲

On considère, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale $J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^3)^n}$.

1. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{(1+x^3)^n}$ est continue et positive sur $[0, +\infty[$. Par ailleurs :

$$\frac{1}{(1+x^3)^n} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^{3n}}$$

Puisque $3n > 1$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{3n}}$ converge, donc par comparaison l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^3)^n}$ est convergente. Finalement :

$$\boxed{\text{L'intégrale } J_n \text{ est bien convergente pour tout } n \in \mathbb{N}^*.}$$

2. On a $J_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3}$. Cherchons α et β réels tels que :

$$\frac{1}{1+x^3} = \frac{1}{(1+x)(1-x+x^2)} = \frac{\alpha}{1+x} + \frac{\beta x + \gamma}{1-x+x^2}$$

(La factorisation du dénominateur se fait en remarquant que -1 est racine évidente de x^3+1, puis en factorisant x^3+1 par $x+1$. On obtient une factorisation en produit de deux polynômes irréductibles.)

On doit avoir pour, tout réel x :

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1+x)(1-x+x^2)} &= \frac{\alpha(1-x+x^2) + (\beta x+\gamma)(1+x)}{(1+x)(1-x+x^2)} \\ &= \frac{(\alpha+\beta)x^2 + (-\alpha+\beta+\gamma)x + (\alpha+\gamma)}{(1+x)(1-x+x^2)} \end{aligned}$$

Ce qui est le cas si et seulement si $\begin{cases} \alpha+\beta &= 0 \\ -\alpha+\beta+\gamma &= 0 \\ \alpha+\gamma &= 1 \end{cases}$.
On obtient $\beta=-\alpha$, $\gamma=2\alpha$ et $\alpha=1/3$. D'où :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+x^3} &= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{1+x}+\frac{2-x}{1-x+x^2}\right] = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{1+x}-\frac{1}{2}\frac{(2x-1)}{1-x+x^2}+\frac{3}{2}\times\frac{1}{1-x+x^2}\right] \\
&= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{1+x}-\frac{1}{2}\frac{(2x-1)}{1-x+x^2}+\frac{3/2}{3/4+(x-1/2)^2}\right] \\
&= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{1+x}-\frac{1}{2}\frac{(2x-1)}{1-x+x^2}+\frac{2}{1+(2x/\sqrt{3}-1/\sqrt{3})^2}\right]
\end{aligned}$$

Sous cette forme, une primitive de cette expression est :

$$\frac{1}{3}\left[\ln(|1+x|)-\frac{1}{2}\ln(|1-x+x^2|)+\sqrt{3}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)\right]$$

Donc $J_1=\dfrac{1}{3}\left[\ln\left|\dfrac{1+x}{\sqrt{1-x+x^2}}\right|+\sqrt{3}\arctan\left(\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^{+\infty}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\left[\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{6}\right]$

$$\boxed{J_1=\frac{2\pi\sqrt{3}}{9}}$$

3. $J_n-J_{n+1}=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^3)^n}-\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^3)^{n+1}}=\int_0^{+\infty}\frac{x^3}{(1+x^3)^{n+1}}\,\mathrm{d}x.$
Utilisons l'intégration par parties suivante :

$$\begin{aligned}
u(x)&=x \quad \text{et} \quad v'(x)=\frac{x^2}{(1+x^3)^{n+1}} \\
u'(x)&=1 \qquad\quad v(x)=-\frac{1}{3n}\times\frac{1}{(1+x^3)^n}
\end{aligned}$$

valable car $u(x)v(x)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$. On obtient :

$$J_n-J_{n+1} = \left[-\frac{1}{3n}\times\frac{x}{(1+x^3)^n}\right]_0^{+\infty}+\frac{1}{3n}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^3)^n}$$

$$\boxed{J_n-J_{n+1}=\frac{J_n}{3n}}$$

Ainsi $J_{n+1}=J_n\left(1-\dfrac{1}{3n}\right)=\dfrac{3n-1}{3n}J_n$. Résumons :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad J_{n+1}=\frac{3n-1}{3n}J_n}$$

4. On pose $v_n=\sqrt[3]{n}J_n$ et $u_n=\ln(v_n)$.
   (a) Étudions le terme général de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant1}(u_{n+1}-u_n)$:

$$\begin{aligned}
u_{n+1}-u_n &= \ln\left(\sqrt[3]{n+1}J_{n+1}\right)-\ln\left(\sqrt[3]{n}J_n\right) \\
&= \frac{1}{3}\ln(n+1)-\frac{1}{3}\ln n+\ln J_{n+1}-\ln J_n=\frac{1}{3}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(\frac{J_{n+1}}{J_n}\right)
\end{aligned}$$

   D'après la question précédente, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
u_{n+1}-u_n &= \frac{1}{3}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1-\frac{1}{3n}\right) \\
&= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]-\frac{1}{3n}-\frac{1}{18n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&= -\frac{2}{9n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

D'où $|u_{n+1}-u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{9}\times\frac{1}{n^2}$.

Or la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ converge, donc la série $\sum_{n\geqslant 1}(u_{n+1}-u_n)$ converge absolument. Ainsi :

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 1}(u_{n+1}-u_n) \text{ converge.}}$$

On sait que la suite (u_n) et la série $\sum_{n\geqslant 1}(u_{n+1}-u_n)$ sont de même nature (par télescopage). En conclusion :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ converge.}}$$

(b) On note ℓ la limite de la suite (u_n). Puisque $v_n = e^{u_n}$ alors $\lim_{n\to+\infty} v_n = e^\ell$ par continuité de la fonction exp.

On note $A = e^\ell > 0$.

Il vient $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[3]{n}J_n = A$. Autrement dit :

$$\boxed{\text{Il existe } A>0 \text{ tel que } J_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{A}{\sqrt[3]{n}}.}$$

Correction de l'exercice 15 ▲

1. (a) On introduit la fonction $f : t \mapsto \frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$. Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}^*$, et pour $t\neq 0$, on a, en utilisant un développement en série entière de la fonction exponentielle :

$$f(t) = \frac{1-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^n}{n!}}{t} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{t^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^n}{(n+1)!}$$

On note encore f le prolongement par continuité obtenu en posant $f(0)=1$, et on obtient une fonction développable en série entière sur $\mathbb{R}$. Donc f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ d'après le théorème de dérivabilité des fonctions développables en série entière.

Il reste à remarquer que $A(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ avec f continue sur $\mathbb{R}$, donc A est définie et d'après le théorème fondamental, A est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $A' = f$. En résumé :

$$\boxed{\text{La fonction } A \text{ est définie et de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

(b) Pour $x>0$, la fonction $g : x\mapsto \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}$ est continue donc localement intégrable sur $[x,+\infty[$, et positive. De plus, pour $t\geqslant 1$, on a :

$$0\leqslant \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\leqslant \mathrm{e}^{-t}$$

et comme $\int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge, l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}$ converge donc par comparaison. Ceci entraine la convergence de $\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}$ et donc :

$$\boxed{\text{La fonction } B \text{ est définie sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

Au voisinage de 0_+, on a en revanche :

$$0\leqslant \frac{e^{-t}}{t} \underset{t\to 0_0}{\sim} \frac{1}{t}$$

Et comme $\int_0^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ diverge, alors $\int_0^1\frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ diverge. Ainsi $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ diverge et :

$$\boxed{\text{La fonction } B \text{ n'est pas définie en } 0}$$

(c) Pour $x>0$, on peut utiliser la relation de Chasles :

$$B(x) = \int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t = -\int_1^x \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$$

$g : t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{t}$ étant continue sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_1^x \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de g qui s'annule en 1 d'après le théorème fondamental, et donc :

$$B'(x) = -g(x) = -\frac{e^{-x}}{x}$$

Il suffit pour conclure de constater que $-g$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$, ainsi :

$$\boxed{\text{La fonction } B \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

2. Un développement limité au voisinage de 0 nous donne :

$$\frac{1-(1-u)^n}{u} = \frac{1-(1-nu+o(u))}{u} = n + o(1) \underset{u\to 0}{\longrightarrow} n$$

La fonction $h : u \mapsto \dfrac{1-(1-u)^n}{u}$ se prolonge donc par continuité en 0 avec $h(0) = n$ et en conséquence $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-(1-u)^n}{u}\,\mathrm{d}u$ existe.

La formule de Bernoulli nous permet de simplifier l'expression de h pour $u \in]0,1]$ puisque :

$$1-(1-u)^n = (1-(1-u))\sum_{k=0}^{n-1} 1^{n-1-k}(1-u)^k = u\sum_{k=0}^{n-1}(1-u)^k$$

Donc en utilisant ce résultat et la linéarité de l'intégrale, on a pour $u \neq 0$:

$$\int_0^1 \frac{1-(1-u)^n}{u}\,\mathrm{d}u = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1}(1-u)^k\,\mathrm{d}u = \sum_{k=0}^{n-1}\int_0^1 (1-u)^k\,\mathrm{d}u$$

avec : $\displaystyle\int_0^1 (1-u)^k\,\mathrm{d}u = \left[\frac{-1}{k+1}(1-u)^{k+1}\right]_0^1 = \frac{1}{k+1}$ et donc :

$$\boxed{\int_0^1 \frac{1-(1-u)^n}{u}\,\mathrm{d}u = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}$$

Avec le changement de variable $u = \dfrac{t}{n}$, on obtient d'autre part :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \int_0^1 \frac{1-(1-u)^n}{u}\,\mathrm{d}u &= \int_0^n \frac{1-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n}{t/n}\,\frac{\mathrm{d}t}{n} = \int_0^n \frac{1-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n}{t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \frac{1-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n}{t}\,\mathrm{d}t + \int_1^n \frac{1-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n}{t}\,\mathrm{d}t \\
\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} &= \int_0^1 \frac{1-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n}{t}\,\mathrm{d}t + \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t} - \int_1^n \frac{\left(1-\frac{t}{n}\right)^n}{t}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Il reste à calculer $\displaystyle\int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t} = \Big[\ln t\Big]_1^n = \ln n$ et on en déduit :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n = \int_0^1 \frac{1-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n}{t}\,\mathrm{d}t - \int_1^n \frac{\left(1-\frac{t}{n}\right)^n}{t}\,\mathrm{d}t.}$$

3. (a) On introduit les fonctions φ et ψ définies sur $[0,1]$ par :

$$\varphi(u) = (1+u)\,\mathrm{e}^{-u} - 1 \quad \text{et} \quad \psi(u) = \mathrm{e}^{-u} - 1 + u$$

  - $\star$ la fonction φ est dérivable sur $[0,1]$ et $\forall u \in [0,1]$:

$$\varphi'(u) = -e^{-u} \leqslant 0$$

Donc φ est décroissante sur $[0,1]$ et négative car $\varphi(0) = 0$. On en déduit la négativité de φ sur $[0,1]$ et donc $\forall u \in [0,1]$, on a $(1+u)\,\mathrm{e}^{-u} \leqslant 1$, et $(1-u^2)e^{-u} = (1-u)(1+u)\,\mathrm{e}^{-u} \leqslant 1-u$.

- $\star$ la fonction ψ est dérivable sur $[0,1]$ et $\forall u \in [0,1]$:

$$\psi'(u) = 1 - e^{-u} \geqslant 0$$

Donc ψ est croissante sur $[0,1]$ et positive car $\varphi(0) = 0$. On en déduit la positivité de φ sur $[0,1]$ et donc $\forall u \in [0,1]$, on a $\mathrm{e}^{-u} \geqslant 1 - u$.

En résumé, on a obtenu pour tout u de $[0,1]$:

$$\boxed{(1-u^2)\,\mathrm{e}^{-u} \leqslant 1 - u \leqslant \mathrm{e}^{-u}\,.}$$

(b) Dans cette question (attention, le texte comportait une petite erreur), on peut procéder par récurrence pour démontrer le résultat :

- $\star$ Il est clairement vrai pour $n = 1$ puisque $(1-\alpha)^1 = 1 = 1 - \alpha = 1 - 1\alpha$.
- $\star$ On suppose que le résultat est vrai pour un entier $n \geqslant 1$.

Alors $(1-\alpha)^n \geqslant 1 - n\alpha$, et en utilisant ceci, on a :

$$(1-\alpha)^{n+1} = (1-\alpha)(1-\alpha)^n \geqslant (1-\alpha)(1-n\alpha) = 1 - (n+1)\alpha + n\alpha^2 \geqslant 1 - (n+1)\alpha$$

Donc le résultat est vrai au rang $n+1$.

On conclut par récurrence : pour tout α de $[0,1]$ on a :

$$\boxed{(1-\alpha)^n \geqslant 1 - n\alpha.}$$

(c) Pour $t \in [0,n]$, le résultat de 3a peut s'appliquer à $\frac{t}{n} \in [0,1]$ et :

$$0 \leqslant \big(1 - \frac{t^2}{n^2}\big)\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{n}} \leqslant 1 - \frac{t}{n} \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{t}{n}}$$

Par conservation de ces inégalités à la puissance $n^{ième}$, on a :

$$0 \leqslant \big(1 - \frac{t^2}{n^2}\big)^n\,\mathrm{e}^{-t} \leqslant \big(1 - \frac{t}{n}\big)^n \leqslant \mathrm{e}^{-t}$$

On a donc d'une part $\mathrm{e}^{-t} - \big(1 - \frac{t}{n}\big)^n \geqslant 0$, et d'autre part :

$$\big(1 - \frac{t}{n}\big)^n \geqslant \big(1 - \frac{t^2}{n^2}\big)^n\,\mathrm{e}^{-t} \geqslant \big(1 - \frac{t^2}{n}\big)\,\mathrm{e}^{-t}$$

en appliquant l'inégalité de la question précédente à $\alpha = \dfrac{t^2}{n^2} \in [0,1]$.

Ainsi $e^{-t} - \big(1 - \frac{t}{n}\big) \leqslant \dfrac{t^2}{n}\,\mathrm{e}^{-t}$. On a finalement pour tout t de $[0,n]$:

$$\boxed{0 \leqslant \mathrm{e}^{-t} - \big(1 - \frac{t}{n}\big)^n \leqslant \frac{t^2}{n}\,\mathrm{e}^{-t}\,.}$$

(d) Par définition, on a $\gamma = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n\right)$, ce qui, d'après 2 revient à :

$$\gamma = \lim_{n\to+\infty} \left(\int_0^1 \frac{1 - \big(1 - \frac{t}{n}\big)^n}{t}\,\mathrm{d}t - \int_1^n \frac{\big(1 - \frac{t}{n}\big)^n}{t}\,\mathrm{d}t \right)$$

Il reste donc à exprimer les limites éventuelles de ces deux intégrales, ce qu'on va obtenir par des encadrements :

- $\star$ Pour la première intégrale, on remarque d'abord que :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1 - \big(1 - \frac{t}{n}\big)^n}{t}\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 \frac{1 - e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-t} - \big(1 - \frac{t}{n}\big)^n}{t}\,\mathrm{d}t \\
&= A(1) + \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-t} - \big(1 - \frac{t}{n}\big)^n}{t}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

et on utilise le résultat de 3c :

$$0 \leqslant \mathrm{e}^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leqslant \frac{t^2}{n}\,\mathrm{e}^{-t}$$

qui donne pour $t \in]0,1]$:

$$0 \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n}{t} \leqslant \frac{t}{n}\,\mathrm{e}^{-t}$$

et par passage à l'intégrale sur l'intervalle $]0,1]$ (les fonctions considérées sont intégrables sur cet intervalle, celle du milieu l'étant par majoration) :

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n}\int_0^1 t\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

Donc, d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n}{t}\,\mathrm{d}t = 0, \quad \text{et :} \quad \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{1 - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n}{t}\,\mathrm{d}t = A(1)$$

⋆ Pour la seconde intégrale, on utilise encore le résultat de 3c :

$$\mathrm{e}^{-t} - \frac{t^2}{n}\,\mathrm{e}^{-t} \leqslant \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^{-t}$$

qui donne pour $t \in [1,n]$:

$$\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t} - \frac{t}{n}\,\mathrm{e}^{-t} \leqslant \frac{\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n}{t} \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}$$

et par passage à l'intégrale sur le segment $[1,n]$ (les fonctions considérées sont continues sur ce segment) :

$$\int_1^n \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{n}\int_1^n t\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_1^n \frac{\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_1^n \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$$

Il ne reste plus qu'à constater d'une part que :

$$\int_1^n \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t = B(1)$$

et d'autre part que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ est convergente puisque :

$$\lim_{n\to+\infty} t^3\,\mathrm{e}^{-t} = 0 \quad \text{donc :} \quad t\,\mathrm{e}^{-t} = o\!\left(\frac{1}{t^2}\right) \text{ au voisinage de } +\infty$$

Donc, d'après le théorème des gendarmes : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_1^n \frac{\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n}{t}\,\mathrm{d}t = B(1)$.

Ces deux résultats nous permettent ainsi de conclure :

$$\boxed{\gamma = A(1) - B(1)}$$

4. Soit $x > 0$. Il suffit de remarquer que :

$$A(x) - A(1) = \int_1^x \frac{1 - \mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \quad \text{et que :} \quad B(x) - B(1) = \int_x^1 \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t = -\int_x^1 \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}$$

Ensuite, on écrit :

$$\begin{aligned} A(x) - B(x) - A(1) + B(1) &= (A(x) - A(1)) - (B(x) - B(1)) \\ &= \int_1^x \frac{1 - \mathrm{e}^{t}}{t}\,\mathrm{d}t + \int_1^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t} = \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln x \end{aligned}$$

Avec $\gamma = A(1) - B(1)$, on en déduit donc que pour tout $x > 0$:

$$\boxed{\gamma = A(x) - B(x) - \ln x.}$$

5. (a) Soit $x > 0$, on a pour tout réel $t > x$:

$$0 \leqslant \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{x} \quad \text{et donc :} \quad 0 \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t} \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-t}}{x}$$

Par passage à l'intégrale sur le segment $[x, X]$ (avec $X > x$), on a alors :

$$0 \leqslant \int_x^X \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{x}\int_x^X \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\left(\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-X}\right)$$

Ces inégalités se conservent par passage à la limite lorsque X tend vers $+\infty$ pour x fixé, or :

$$\lim_{X\to+\infty} \int_x^X \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t = B(x) \quad \text{et} \quad \lim_{X\to+\infty} \frac{1}{x}\left(\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-X}\right) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$$

$$\boxed{\text{On a donc pour tout } x > 0, \quad 0 \leqslant B(x) \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}.}$$

(b) On constate en premier lieu que la fonction $h : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ puisque

$$h'(x) = -\frac{(1+x)\,\mathrm{e}^{-x}}{x^2} \leqslant 0$$

Ainsi tout x_0 vérifiant $\dfrac{\mathrm{e}^{-x_0}}{x_0} < \dfrac{10^{-2}}{3} = \dfrac{1}{300}$ convient.

Remarquons ensuite que comme $\mathrm{e} > 2$, on a $\dfrac{1}{x\,\mathrm{e}^x} \leqslant \dfrac{1}{x2^x}$. Par exemple, si $x_0 = 6$:

$$\frac{\mathrm{e}^{-x_0}}{x_0} \leqslant \frac{1}{6 \times 2^6} = \frac{1}{384} < \frac{1}{300}$$

Par suite, en utilisant l'inégalité de la question précédente :

$$\boxed{\text{Pour } x \geqslant 6, \text{ on a } B(x) \leqslant \frac{1}{3}10^{-2}.}$$

6. (a) On a vu dans la question 1a que la fonction $f : t \mapsto \frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ était développable en série entière sur $\mathbb{R}$. Le théorème d'intégration des fonctions développables en série entière appliqué au segment $[0, x]$ nous permet alors d'écrire :

$$A(x) = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n}{(n+1)!}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!}\int_0^x t^n\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(n+1)!}$$

Donc A est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et :

$$\boxed{A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \times n!} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n}$$

(b) Soit $x > 0$ fixé. On a pour $n \geqslant x$:

$$\frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \frac{n \times n!}{(n+1)(n+1)!} x = \frac{nx}{(n+1)^2} \leqslant \frac{n^2}{(n+1)^2} \leqslant 1$$

On en déduit donc $|a_{n+1}x^{n+1}| \leqslant |a_n x^n|$ et :

$$\boxed{\text{La suite } (|a_n x^n|)_{n\geqslant 0} \text{ est décroissante pour } n \geqslant x.}$$

On note $N = E(x) + 1$. Ce dernier résultat, ajouté au fait que $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n x^n| = 0$, nous indique que la série $\sum_{n\geqslant N} a_n x^n$ est une série alternée qui relève du critère spécial. Son reste d'ordre $n \geqslant N$ (qui est aussi celui de la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n x^n$) est donc majoré par le premier terme négligé en valeur absolue, c'est à dire :

$$\boxed{\text{Pour } x > 0 \text{ et } n \geqslant x, \text{ on a } |R_n(x)| \leqslant |a_n x^{n+1}| = \frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+1)!}}$$

7. On sait déjà d'après 4 que $\gamma = A(x_0) - B(x_0) - \ln x_0$, or avec 3a :

$$0 \leqslant B(x_0) = \gamma - A(x_0) + \ln x_0 \leqslant \frac{1}{3}10^{-2}$$

Il reste à trouver des valeurs approchées de $\ln x_0$ et $A(x_0)$ à $10^{-2}/3$ près (ici à l'aide de la calculatrice). Or $\alpha = 1,792$ est une valeur approchée à $10^{-2}/3$ près de $\ln x_0$, et de plus pour $n \geqslant 6$:

$$|A(x_0) - A_n(x_0)| \leqslant \frac{x_0^{n+1}}{(n+1)(n+1)!}$$

En particulier, $|A(x_0) - A_{16}(x_0)| \leqslant \dfrac{x_0^{17}}{(17)(17)!} \simeq 2,8 \times 10^{-3}$, donc $A_{16}(x_0)$ est une valeur approchée à $10^{-2}/3$ près de $A(x_0)$. Or :

$$A_{16}(x_0) = \sum_{n=1}^{16} \frac{(-1)^{n-1}}{n \times n!} x^n = 2,367 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

On a en résumé :

$$|\gamma - A_{16}(x_0) + \alpha| \leqslant |\gamma - A(x_0) + \ln x_0| + |A(x_0) - A_{16}(x_0)| + |\alpha - \ln x_0| \leqslant 3 \times \frac{1}{3}10^{-2} = 10^{-2}$$

En regroupant ce qui précède :

$$\boxed{\gamma = 0,575 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}}$$