Sujets : Intégrale sur un segment.

Énoncés des sujets :

Exercice 1

Pour n entier naturel non nul, on pose :

$$S_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}.$$

Le but de cet exercice est de montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel noté $\zeta(2)$ quand n tend vers $+\infty$ et que :

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}.$$

On pose :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t \ \text{ et } \ J_n = \int_0^{\pi/2} t^2\cos^n(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Calculer I_0, J_0, I_1 et J_1.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n > 0$.
3. Montrer que :
$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n.$$
4. (a) Pour $t \in [0, \pi/2]$, montrer que :
$$0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}\sin(t).$$
En déduire que :
$$0 \leqslant J_n \leqslant \frac{\pi^2}{4}(I_n - I_{n+2}).$$
(b) Montrer alors que la suite de terme général J_n/I_n converge vers 0.
5. Montrer que :
$$I_{n+2} = \frac{(n+1)(n+2)J_n - (n+2)^2 J_{n+2}}{2}.$$
En déduire que :
$$\frac{J_n}{I_n} - \frac{J_{n+2}}{I_{n+2}} = \frac{2}{(n+2)^2}.$$
6. En sommant l'inégalité précédente, conclure que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\dfrac{\pi^2}{6}$.

Correction ▼ [is1]

Exercice 2

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n x}{\cos x}\,\mathrm{d}x$.

1. Vérifier que u_n est bien défini pour tout n de $\mathbb{N}$ puis calculer u_1.
2. (a) Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^n(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x$.
(b) Exprimer $u_{n+2} - u_n$ en fonction de n. En déduire u_3.
3. Étudier les variations de la suite (u_n) et en déduire qu'elle est convergente.
4. (a) Déterminer un réel K élément de $]0;1[$ tel que :
$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right],\ \ \sin(x) \leqslant K.$$
(b) Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{2\pi}{3}K^n$. En déduire que la série de terme général u_n est convergente.
5. (a) Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{n-1} u_k = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x(1-\sin x)}\,\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n x}{\cos x(1-\sin x)}\,\mathrm{d}x.$$

(b) En déduire que la somme S de la série de terme général u_n est égale à $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x(1-\sin x)}\,\mathrm{d}x$.

(c) En effectuant le changement de variable $u = \sin x$, montrer que $S = \displaystyle\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{1}{(1-u)^2(1+u)}\,\mathrm{d}u$.

(d) Déterminer les réels a, b et c tels que :

$$\forall u \in \mathbb{R}\backslash\{-1;1\},\quad \frac{1}{(1-u)^2(1+u)} = \frac{a}{1-u} + \frac{b}{1+u} + \frac{c}{(1-u)^2}$$

En déduire la valeur de S.

Correction ▼ [is3]

Exercice 3

On pose $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{2+\sqrt{t(4-t)}}\mathrm{d}t$.

1. Montrer que $I = \displaystyle\int_{\pi/2}^{2\pi/3} \frac{\sin(u)}{1+\sin(u)}\mathrm{d}u$.
2. Montrer que $I = \displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{4v}{(1+v)^2(1+v^2)}\mathrm{d}v$.
3. En déduire que $I = \dfrac{\pi}{6} - 2 + \sqrt{3}$.

Correction ▼ [is4]

Exercice 4

1. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties :

$$\lim_{x\to+\infty} \int_a^b f(t)\cos(xt)\,\mathrm{d}t = 0$$

2. On note $J_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(nt)}{\sin t}\mathrm{d}t$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

   (a) Justifier l'existence de J_n.

   (b) Calculer J_0, J_1, J_2 et J_3.

   (c) Exprimer $J_n - J_{n-2}$ en fonction de n et en déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\qquad J_{2n+1} = \frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad J_{2n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2(-1)^k}{2k+1}$$

   (d) Montrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(J_n - J_{n-1}) = 0$ et en déduire que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} J_n = \frac{\pi}{2}$.

   (e) Déduire des résultats précédents l'égalité $\pi = 4\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Correction ▼ [is5]

Exercice 5

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$a_n = \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n \mathrm{d}t$$

Partie I. Étude de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de la série $\sum(-1)^n a_n$.

1. (a) Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.

   (b) En déduire qu'elle est convergente. On notera ℓ sa limite.

(c) Justifier que pour tout $t \in [0,1]$, $1+t^2 \leqslant 1+t$ et en déduire que $\ell = 0$.

2. On se propose ici de montrer la convergence et de calculer la somme de la série $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n a_n$

   Soit $n \in \mathbb{N}$.

   (a) Montrer que pour tout $t \in [0,1]$:
$$\sum_{p=0}^{n}(-1)^p\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^p = \frac{2}{3+t^2} - (-1)^{n+1}\frac{2}{3+t^2}\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{n+1}.$$

   (b) Vérifier l'inégalité : $\displaystyle\int_0^1 \frac{2}{3+t^2}\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{n+1} \mathrm{d}t \leqslant \frac{2}{3}a_{n+1}$.

   (c) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{2}{3+t^2}\mathrm{d}t$ à l'aide du changement de variable $t = \sqrt{3}u$.

   (d) En conclure que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \sum_{p=0}^{n}(-1)^p\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^p \mathrm{d}t = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

   (e) En déduire la convergence de la série et la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n$.

Partie II. Étude de la série entière $\sum a_n x^n$ et de sa somme.

1. Soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$.

   (a) Justifier que $R \geqslant 1$.

   (b) Soit $x > 1$ fixé.

      i. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\int_0^1 \left((1+t^2)\frac{x}{2}\right)^n \mathrm{d}t \geqslant \int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^1 \left((1+t^2)\frac{x}{2}\right)^n \mathrm{d}t$$

      ii. En déduire alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$a_n x^n \geqslant \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\frac{1+x}{2}\right)^n.$$

      Justifier la divergence de la série numérique $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$.

   (c) Conclure à $R = 1$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]-1,1[$ fixé. On définit sur $[0,1]$ la fonction g_x par $g_x(t) = 1 - x\dfrac{1+t^2}{2}$.

   (a) Étudier les variations de g_x sur $[0,1]$ et dresser son tableau de variations complet suivant le signe de x.

   (b) Justifier que la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{g_x(t)}$ est définie et continue sur $[0,1]$ et qu'il existe une constante $K_x > 0$ telle que pour tout $t \in [0,1]$:
$$\left|\frac{2}{2-x-xt^2}\right| = \left|\frac{1}{g_x(t)}\right| \leqslant K_x.$$

   (c) Montrer alors que :
$$\left|\int_0^1 \frac{2}{2-x-xt^2}\left(\frac{x}{2}(1+t^2)\right)^{n+1} \mathrm{d}t\right| \leqslant K_x|x|^{n+1}a_{n+1}.$$

3. Montrer l'égalité :
$$\sum_{p=0}^{n} a_p x^p = \int_0^1 \frac{2}{2-x-xt^2}\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{2}{2-x-xt^2}\left(\frac{x}{2}(1+t^2)\right)^{n+1} \mathrm{d}t$$

4. Grâce à l'étude de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de l'égalité qui précède, en déduire que :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \int_0^1 \frac{2}{2-x-xt^2}\mathrm{d}t.$$

Correction ▼ [is01]

Exercice 6

Intégrale de Wallis

On pose pour $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n \, \mathrm{d}t$$

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Montrer que la suite $n \mapsto I_n$ est décroissante.
3. Établir : $\forall n \geqslant 2, \;\; I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$.
4. Pour $k \in \mathbb{N}$, donner l'expression de I_{2k} en fonction de k.
5. À l'aide des questions 2 et 3, montrer qu'on a :
$$\forall n \geqslant 2, \;\; \frac{n}{n-1} \geqslant \frac{I_{n-1}}{I_n} \geqslant 1.$$
En déduire la limite, quand $n \to +\infty$, de $\dfrac{I_{n-1}}{I_n}$.
6. Montrer par récurrence qu'on a :
$$\forall n \geqslant 1, \;\; n I_n I_{n-1} = \frac{\pi}{2}.$$
7. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} n I_n^2$.
8. En déduire :
$$\lim_{k \to +\infty} \frac{2^{2k}(k!)^2}{\sqrt{2k}(2k)!} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \text{(Formule de Wallis)}$$

Formule de Stirling

9. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :
$$u_n = \frac{1}{2}\ln n + n \ln \frac{n}{e} - \ln(n!).$$
10. Montrer, en le calculant, qu'il existe $\alpha > 0$ tel que, quand $n \to +\infty$:
$$u_{n+1} - u_n = \frac{\alpha}{n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big).$$
11. En déduire que la suite (u_n) est convergente (ne pas chercher à calculer sa limite).
12. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$:
$$w_n = \frac{n!}{\big(\frac{n}{e}\big)^n \times \sqrt{n}}.$$
Montrer que la suite (w_n) est convergente, et que sa limite L est non nulle.
13. Calculer L en démontrant qu'on a aussi $L = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{w_n^2}{w_{2n}}$, puis en utilisant la formule de Wallis.
14. Conclure que, quand $n \to +\infty$:
$$n! \sim \Big(\frac{n}{e}\Big)^n \sqrt{2\pi n} \quad \text{(Formule de Stirling)}$$

Correction ▼ [is02]

Exercice 7

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{4 - x^2} \, \mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad v_n = \int_0^{1/2} \frac{x^n}{1 - x^2} \, \mathrm{d}x$$

1. (a) Calculer u_0 et u_1.
   (b) Calculer $u_{n+2} - 4u_n$ en fonction de n. En déduire u_2 et u_3.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et strictement positive.
   En déduire qu'elle est convergente.
3. En majorant la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{4-x^2}$ sur $[0,1]$, déterminer la limite de la suite (u_n).
4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^{n-1}v_n$. En déduire la limite de la suite (v_n).
5. On pose, pour tout entier naturel n : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$, et $S'_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k$.
   (a) En minorant la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{4-x^2}$ sur $[0,1]$, déterminer la limite de la suite (S_n).
   (b) En déduire que le rayon de convergence de la série $\sum u_n z^n$ est égal à 1.
   Expliquer à l'aide de la question 4 pourquoi on peut en conclure que la suite (S'_n) converge.
   (c) Montrer que $S'_n = \displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1}{(1-x^2)(1-x)}\,\mathrm{d}x - \int_0^{1/2} \frac{x^{n+1}}{(1-x^2)(1-x)}\,\mathrm{d}x$.
   (d) Calculer $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1}{(1-x^2)(1-x)}\,\mathrm{d}x$ à l'aide d'une décomposition en éléments simples du type :
   $$\frac{1}{(1-x^2)(1-x)} = \frac{\alpha}{1-x} + \frac{\beta}{(1-x)^2} + \frac{\gamma}{1+x}$$
   (e) Montrer pour tout entier n l'encadrement suivant :
   $$0 \leqslant \int_0^{1/2} \frac{x^{n+1}}{(1-x^2)(1-x)}\,\mathrm{d}x \leqslant 2v_{n+1}$$
   (f) Déduire des deux questions précédentes la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S'_n$.

Correction ▼ [is03]

Exercice 8

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\cos t)^n\,\mathrm{d}t$.

1. Calculer W_0 et W_1.
2. (a) Montrer que la suite (W_n) est décroissante.
   (b) Montrer que pour tout entier n tel que $n \geqslant 0$: $W_n > 0$.
3. (a) Montrer que pour tout entier n tel que $n \geqslant 0$: $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$.
   (b) En déduire que, pour tout entier n tel que $n \geqslant 0$: $(n+1)W_{n+1}W_n = \dfrac{\pi}{2}$.
4. (a) Montrer que pour tout entier n tel que $n \geqslant 0$: $W_n \geqslant W_{n+1} \geqslant \dfrac{n+1}{n+2}W_n$.
   (b) En déduire $W_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} W_n$, puis $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.
5. Montrer que pour tout entier n tel que $n \geqslant 0$: $W_{2n} = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\dfrac{\pi}{2}$.
   On note pour tout entier n tel que $n \geqslant 1$: $A_n = \dfrac{1}{n!}n^n e^{-n}\sqrt{n}$.
   On note pour tout entier n tel que $n \geqslant 2$: $a_n = -1 - \left(n - \dfrac{1}{2}\right)\ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$.
6. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} a_n$ converge.
7. Montrer que pour tout entier n tel que $n \geqslant 2$: $a_n = \ln(A_n) - \ln(A_{n-1})$.

8. En déduire que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et que sa limite ℓ est strictement positive.

9. (a) Justifier $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\ell} n^n e^{-n}\sqrt{n}$.

   (b) En utilisant l'expression de W_{2n} à l'aide de factorielles, en déduire la valeur de ℓ et l'équivalent suivant :

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}.$$

Correction ▼ [is04]

Corrigés des sujets :

Correction de l'exercice 1 ▲

1. Les calculs de I_0, I_1 et J_0 ne posent pas de problème :

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}; \qquad I_1 = \int_0^{\pi/2} \cos t \,\mathrm{d}t = [\sin t]_0^{\pi/2} = 1; \qquad J_0 = \int_0^{\pi/2} t^2 \,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^3}{24}$$

Pour J_1, on procède à l'aide d'une intégration par parties, avec $\begin{array}{ll} u(t) = t^2 & \text{et} \quad v'(t) = \cos t \\ u'(t) = 2t & \quad\;\;\, v(t) = \sin t \end{array}$:

$$\int_0^{\pi/2} t^2 \cos t \,\mathrm{d}t = \left[t^2 \sin t\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 2t \sin t \,\mathrm{d}t$$

puis à l'aide d'une seconde avec $\begin{array}{ll} u(t) = 2t & \text{et} \quad v'(t) = \sin t \\ u'(t) = 2 & \quad\;\;\, v(t) = -\cos t \end{array}$:

$$J_1 = \frac{\pi^2}{4} - \left([-2t\cos t]_0^{\pi/2} + 2\int_0^{\pi/2} \cos t \,\mathrm{d}t \right) = \frac{\pi^2}{4} - 2\,[\sin t]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{4} - 2$$

En résumé :

$$\boxed{I_0 = \frac{\pi}{2}; \qquad I_1 = 1; \qquad J_0 = \frac{\pi^3}{24}; \qquad J_1 = \frac{\pi^2}{4} - 2.}$$

2. La fonction $t \mapsto \cos^n t$ étant pour tout entier n continue, positive, et non nulle sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n t \,\mathrm{d}t > 0$, et donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ I_n > 0.}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On fait une intégration par parties appliquée à I_{n-2} avec :

$$\begin{array}{lll} u(t) = \cos^{n+1} t & \text{et} & v'(t) = \cos t \\ u'(t) = -(n+1)\sin t \cos^n t & & v(t) = \sin t \end{array}$$

ce qui donne :

$$I_{n+2} = \left[\sin t \cos^{n+1} t\right]_0^{\pi/2} + (n+1)\int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos^n t \,\mathrm{d}t$$

En utilisant la relation $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, on en déduit :

$$I_{n+2} = (n+1)\int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 t)\cos^n t \,\mathrm{d}t = (n+1)I_n - (n+1)I_{n+2}$$

Ce qui donne finalement en regroupant $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$, soit :

$$\boxed{I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n.}$$

4. (a) Pour $t \in [0, \pi/2]$, on pose $h(t) = \dfrac{\pi}{2}\sin t - t$, et on calcule :

$$h'(t) = \frac{\pi}{2}\cos t - 1 \quad \text{et} \quad h''(t) = -\frac{\pi}{2}\sin t < 0 \ \ \forall t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$$

La fonction h' est donc strictement décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, et comme $h'(0) = \frac{\pi}{2} - 1 > 0$ et $h'(\pi/2) = -1 < 0$, elle s'annule une fois sur cet intervalle en $\alpha = \arccos \frac{2}{\pi}$. On a en résumé :

— $h(0) = 0$, h croissante sur $[0, \alpha]$ donc $h \geqslant 0$ sur cet intervalle.

— h décroissante sur $[\alpha, \pi/2]$ et $h(\pi/2) = 0$ donc $h \geqslant 0$ sur cet intervalle.

La fonction h est donc positive sur $[0,\pi/2]$, donc si t est sur cet intervalle on a $\dfrac{\pi}{2}\sin t \geqslant t$, et l'autre inégalité étant triviale, on a :

$$\boxed{\forall t\in[0,\pi/2],\quad 0\leqslant t\leqslant \frac{\pi}{2}\sin(t).}$$

Si $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, on en déduit $0\leqslant t^2\leqslant \dfrac{\pi^2}{4}\sin^2(t)=\dfrac{\pi^2}{4}(1-\cos^2 t)$, et en multipliant par $\cos^n t\geqslant 0$:

$$0\leqslant t^2\cos^n t\leqslant \frac{\pi^2}{4}(\cos^n t-\cos^{n+2} t)$$

Ces inégalités sont conservées par passage à l'intégrale entre 0 et $\pi/2$:

$$0\leqslant \int_0^{\pi/2} t^2\cos^n t\leqslant \int_0^{\pi/2}\frac{\pi^2}{4}(\cos^n t-\cos^{n+2} t)$$

Par linéarité de l'intégrale du membre de droite, on retrouve :

$$\boxed{0\leqslant J_n\leqslant \frac{\pi^2}{4}(I_n-I_{n+2}).}$$

(b) Comme $I_n>0$ d'après la question 2, l'inégalité qui précède permet d'écrire :

$$0\leqslant \frac{J_n}{I_n}\leqslant \frac{\pi^2}{4}\left(1-\frac{I_{n+2}}{I_n}\right)$$

Avec la relation de la question 3, on a :

$$0\leqslant \frac{J_n}{I_n}\leqslant \frac{\pi^2}{4}\left(1-\frac{n+1}{n+2}\right)=\frac{\pi^2}{4}\times\frac{1}{n+2}$$

Comme $\dfrac{\pi^2}{4}\times\dfrac{1}{n+2}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$, on conclut avec le théorème des gendarmes :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{I_n}{J_n}=0}$$

5. On veut maintenant exprimer I_{n+2} en fonction de J_n et J_{n+2}. Pour cela, on va procéder à l'aide d'une intégration par parties avec :

$$\begin{array}{lcl} u(t)=\cos^{n+2} t & \text{et} & v'(t)=1\\ u'(t)=-(n+2)\sin t\cos^{n+1} t & & v(t)=t\end{array}$$

ce qui donne :

$$I_{n+2}=\int_0^{\pi/2}\cos^{n+2} t\,\mathrm{d}t=\left[t\cos^{n+2} t\right]_0^{\pi/2}+(n+2)\int_0^{\pi/2} t\sin t\cos^{n+1} t\,\mathrm{d}t$$

Le premier membre entre crochets étant nul, on refait une intégration par parties avec :

$$\begin{array}{lcl} u(t)=\sin t\cos^{n+1} t & \text{et} & v'(t)=t\\ u'(t)=\cos^{n+2} t-(n+1)\sin^2 t\cos^n t & & v(t)=\frac{t^2}{2}\end{array}$$

et on obtient :

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= (n+2)\left(\left[\frac{t^2}{2}\sin t\cos^{n+1} t\right]_0^{\pi/2}-\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} t^2\cos^{n+2} t\,\mathrm{d}t+\frac{n+1}{2}\int_0^{\pi/2} t^2\sin^2 t\cos^n t\,\mathrm{d}t\right)\\ &= (n+2)\left(-\frac{1}{2}J_{n+2}+\frac{n+1}{2}\int_0^{\pi/2} t^2(1-\cos^2 t)\cos^n t\,\mathrm{d}t\right)\end{aligned}$$

Cette dernière intégrale peut s'exprimer en fonction de J_n et J_{n+2} ce qui donne :

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= (n+2)\left(-\frac{1}{2}J_{n+2}+\frac{n+1}{2}(J_n-J_{n+2})\right)\\ &= \frac{n+2}{2}\left((n+1)J_n-(n+2)J_{n+2}\right)\end{aligned}$$

on peut finalement mettre cette expression sous la forme annoncée :

$$\boxed{I_{n+2} = \frac{(n+1)(n+2)J_n - (n+2)^2 J_{n+2}}{2}.}$$

En divisant le résultat par I_n, on écrit ensuite (en utilisant deux fois le résultat de la question 3) :

$$\begin{aligned}
\frac{I_{n+2}}{I_n} = \frac{n+1}{n+2} &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}\frac{J_n}{I_n} - \frac{(n+2)^2}{2}\frac{J_{n+2}}{I_n} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{2}\frac{J_n}{I_n} - \frac{(n+2)^2}{2}\frac{n+1}{(n+2)I_{n+2}}J_{n+2} \\
\frac{n+1}{n+2} &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}\left(\frac{J_n}{I_n} - \frac{J_{n+2}}{I_{n+2}}\right)
\end{aligned}$$

Il reste à diviser l'égalité obtenue par $(n+1)(n+2)$ pour obtenir le résultat :

$$\boxed{\frac{J_n}{I_n} - \frac{J_{n+2}}{I_{n+2}} = \frac{2}{(n+2)^2}.}$$

6. En posant $n = 2k$ dans l'inégalité précédente, on a :

$$\frac{J_{2k}}{I_{2k}} - \frac{J_{2k+2}}{I_{2k+2}} = \frac{2}{(2k+2)^2} = \frac{1}{2(k+1)^2}.$$

On peut alors effectuer la somme, pour k variant de 0 à $n-1$ et constater un télescopage :

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{J_{2k}}{I_{2k}} - \frac{J_{2k+2}}{I_{2k+2}}\right) = \frac{J_0}{I_0} - \frac{J_{2n}}{I_{2n}} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(k+1)^2} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = \frac{1}{2}S_n$$

On sait d'après la question 4b que $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{J_{2n}}{I_{2n}} = 0$, donc $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge (ce qu'on sait de toutes façons avec la théorie des séries) et :

$$\zeta(2) = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} 2\left(\frac{J_0}{I_0} - \frac{J_{2n}}{I_{2n}}\right) = 2\times\frac{J_0}{I_0} = \frac{\pi^2}{6}$$

On a donc bien prouvé le résultat :

$$\boxed{\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}}$$

Correction de l'exercice 2 ▲

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n x}{\cos x}\,\mathrm{d}x$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin x}{\cos x}$ est définie (car $\cos x \neq 0$) et continue sur $[0, \pi/3]$. Donc $u_n = \displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{\sin^n x}{\cos x}\,\mathrm{d}x$ existe.

$$\boxed{u_n \text{ est défini pour tout entier naturel } n.}$$

Par ailleurs, $u_1 = \displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = \Big[-\ln|\cos x|\Big]_0^{\pi/3} = -\ln\frac{1}{2}$.

$$\boxed{u_1 = \ln 2}$$

2. (a) Il est facile de trouver une primitive de $x \mapsto \sin^n(x)\cos(x)$, ce qui donne :

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^n(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\sin^{n+1} x}{n+1}\right]_0^{\pi/3} = \frac{(\sqrt{3}/2)^{n+1}}{n+1}$$

$$\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^n(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x = \frac{3^{\frac{n+1}{2}}}{(n+1)2^{n+1}}}$$

(b) On calcule $u_{n+2}-u_n$:

$$\begin{aligned} u_{n+2}-u_n &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^{n+2}(x)-\sin^n x}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\sin^2(x)-1)\sin^n x}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x \\ &= -\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2 x \sin^n x}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x \\ &= -\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos x \sin^n x \,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Et d'après le résultat de la question précédente, on a :

$$\boxed{u_{n+2}-u_n = -\frac{3^{\frac{n+1}{2}}}{(n+1)2^{n+1}}}$$

En particulier avec $n=1$ et le résultat de la question 1 : $u_3 = u_1 - \dfrac{3}{8}$.

$$\boxed{u_3 = \ln 2 - \frac{3}{8}}$$

3. Étudions les variations de la suite (u_n). Pour $n \in \mathbb{N}$ on calcule :

$$u_{n+1}-u_n = \int_0^{\pi/3} \frac{\sin^n x(\sin x - 1)}{\cos x} dx$$

Or pour $x \in [0, \pi/3]$, on remarque que $\sin^n x \geqslant 0$, $\sin x - 1 \leqslant 0$ et $\cos x \geqslant 0$, donc l'intégrande est négative, ce qui entraine par passage à l'intégrale : $u_{n+1}-u_n \leqslant 0$.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est décroissante.}}$$

Comme de plus, cette suite est minorée par 0 (la fonction à intégrer étant elle même positive) :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est convergente.}}$$

4. (a) La fonction sinus étant croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$, on a :

$$\boxed{\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right], \quad 0 \leqslant \sin(x) \leqslant \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.}$$

ce qui répond à la question (avec $K = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$).

(b) L'encadrement établi nous autorise à écrire pour $n \geqslant 1$ et $t \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$:

$$0 \leqslant \sin^n(t) \leqslant \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$$

D'autre part, la fonction cosinus étant décroissante sur cet intervalle, on a pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$: $\cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2} \leqslant \cos t \leqslant 1$ et donc :

$$0 \leqslant \frac{\sin^n t}{\cos t} \leqslant 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$$

Ces inégalités sont conservées par passage à l'intégrale entre 0 et $\frac{\pi}{3}$:

$$0 \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n t}{\cos t}\,\mathrm{d}t \leqslant 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \int_0^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{d}t$$

Ce qui donne après calcul :

$$\boxed{0 \leqslant u_n \leqslant \frac{2\pi}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n}$$

La série $\sum u_n$ est donc une série à termes positifs, et son terme général est majoré (à un coefficient près) par le terme général d'une série géométrique convergente (car $0 \leqslant \sqrt{3}/2 < 1$). Donc par comparaison :

$$\boxed{\text{La série } \sum u_n \text{ est convergente.}}$$

5. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par linéarité de l'intégrale sur un segment, on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^k x}{\cos x} \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \sin^k x \right) \mathrm{d}x.$$

On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique, ce qui permet d'écrire :

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x} \times \frac{1 - \sin^n x}{1 - \sin x} \mathrm{d}x$$

D'où, en séparant en deux intégrales :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x(1 - \sin x)} \mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n x}{\cos x(1 - \sin x)} \mathrm{d}x.}$$

(b) Il reste à encadrer la deuxième intégrale afin de montrer que l'expression tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. On a pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$:

$$1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \leqslant 1 - \sin x \leqslant 1 \qquad \text{et donc :} \qquad 0 \leqslant 1 \leqslant \frac{1}{1 - \sin x} \leqslant \frac{1}{1 - \sqrt{3}/2}$$

En multipliant par $\dfrac{\sin^n x}{\cos x} \geqslant 0$ et en intégrant entre 0 et $\frac{\pi}{3}$, on a :

$$0 \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n x}{\cos x(1 - \sin x)} \leqslant \frac{1}{1 - \sqrt{3}/2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n x}{\cos x} = \frac{1}{1 - \sqrt{3}/2} u_n$$

Or on a vu à la question 4b que la série $\sum u_n$ converge, ce qui signifie que la suite (u_n) converge vers 0. Donc d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n x}{\cos x(1 - \sin x)} = 0$$

Ainsi, on a bien :

$$\boxed{S = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} u_k = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x(1 - \sin x)} \mathrm{d}x}$$

(c) Il ne reste plus qu'à calculer cette dernière intégrale. En effectuant le changement de variable $u = \sin x$ ($\mathrm{d}u = \cos x \, \mathrm{d}x$), on a :

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x \, \mathrm{d}x}{\cos^2 x(1 - \sin x)} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x \, \mathrm{d}x}{(1 - \sin^2 x)(1 - \sin x)} \\ &= \int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{1}{(1 - u^2)(1 - u)} \mathrm{d}u \end{aligned}$$

et comme $(1 - u^2)(1 - u) = (1 - u)(1 + u)(1 - u) = (1 - u)^2(1 + u)$, on a :

$$\boxed{S = \int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{1}{(1 - u)^2(1 + u)} \mathrm{d}u}$$

(d) Soient a, b et $c \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathbb{R} \backslash \{-1; 1\}$:

$$\begin{aligned} \frac{a}{1 - u} + \frac{b}{1 + u} + \frac{c}{(1 - u)^2} &= \frac{a(1 - u^2) + b(1 - u)^2 + c(1 + u)}{(1 + u)(1 - u)^2} \\ &= \frac{(-a + b)u^2 + 2(c - 2b)u + (a + b + c)}{(1 + u)(1 - u)^2} \end{aligned}$$

Donc $\dfrac{1}{(1-u)^2(1+u)} = \dfrac{a}{1-u} + \dfrac{b}{1+u} + \dfrac{c}{(1-u)^2}$ $\forall u \in \mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$ si et seulement si :

$$\begin{cases} b-a &= 0 \\ c-2b &= 0 \\ a+b+c &= 1 \end{cases}$$

Soit après résolution du système $a = b = 1/4$ et $c = 1/2$. On a donc :

$$\boxed{\forall u \in \mathbb{R}\backslash\{-1;1\}, \quad \frac{1}{(1-u)^2(1+u)} = \frac{1}{4(1-u)} + \frac{1}{4(1+u)} + \frac{1}{2(1-u)^2}}$$

Cette décomposition en éléments simples nous permet de calculer S :

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{4}\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{1}{1-u}\mathrm{d}u + \frac{1}{4}\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{1}{1+u}\mathrm{d}u + \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{1}{(1-u)^2}\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{4}\Big[-\ln(1-u)\Big]_0^{\sqrt{3}/2} + \frac{1}{4}\Big[\ln(1+u)\Big]_0^{\sqrt{3}/2} + \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{1-u}\Big]_0^{\sqrt{3}/2} \end{aligned}$$

Il nous reste à simplifier le calcul :

$$\begin{aligned} S &= -\frac{1}{4}\ln\left(1-\sqrt{3}/2\right) + \frac{1}{4}\ln\left(1+\sqrt{3}/2\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\sqrt{3}/2} - 1\right) \\ &= \frac{1}{4}\ln\left(\frac{1+\sqrt{3}/2}{1-\sqrt{3}/2}\right) + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}/2}{1-\sqrt{3}/2} \\ S &= \frac{1}{4}\ln\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \end{aligned}$$

En multipliant les dénominateurs par la quantité conjuguée, on finit par obtenir :

$$\boxed{S = \frac{1}{4}\ln(7+4\sqrt{3}) + \frac{1}{2}(3+2\sqrt{3})}$$

Correction de l'exercice 3 ▲

On pose $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{2+\sqrt{t(4-t)}}\mathrm{d}t$.

1. Transformons un peu l'expression pour la mettre sous forme canonique :

$$I = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{2+\sqrt{4t-t^2}} = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{2+\sqrt{4-(t-2)^2}} = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{1+\sqrt{1-(\frac{t-2}{2})^2}}$$

Avec le changement de variable $x = \frac{t-2}{2}$, on obtient :

$$I = \int_{-1/2}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{1-x^2}}$$

Il reste à effectuer le changement de variable $x = \cos u$:

$$I = \int_{2\pi/3}^{\pi/2} \frac{-\sin u\,\mathrm{d}u}{1+\sqrt{1-\cos^2 u}}\mathrm{d}u$$

En inversant les bornes et en remarquant que $\sqrt{1-\cos^2 u} = \sqrt{\sin^2 u} = |\sin u| = \sin u$ sur l'intervalle d'intégration, on conclut :

$$\boxed{I = \int_{\pi/2}^{2\pi/3} \frac{\sin(u)}{1+\sin(u)}\mathrm{d}u}$$

2. Ici, c'est le changement de variable classique $v = \tan\frac{u}{2}$ qui va prévaloir. Avant, il faut un peu transformer l'expression :

$$\begin{aligned} I &= \int_{\pi/2}^{2\pi/3} \frac{\dfrac{2\tan\frac{u}{2}}{1+\tan^2\frac{u}{2}}}{1+\dfrac{2\tan\frac{u}{2}}{1+\tan^2\frac{u}{2}}}\mathrm{d}u = \int_{\pi/2}^{2\pi/3} \frac{2\tan\frac{u}{2}}{1+\tan^2\frac{u}{2}+2\tan\frac{u}{2}}\mathrm{d}u \\ &= \int_{\pi/2}^{2\pi/3} \frac{2\tan\frac{u}{2}}{\left(1+\tan\frac{u}{2}\right)^2}\mathrm{d}u = \int_{\pi/2}^{2\pi/3} \frac{4\tan\frac{u}{2}}{\left(1+\tan\frac{u}{2}\right)^2\left(1+\tan^2\frac{u}{2}\right)} \times \frac{1}{2}\left(1+\tan^2\frac{u}{2}\right)\mathrm{d}u \end{aligned}$$

On conclut :

$$\boxed{I = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{4v}{(1+v)^2(1+v^2)}\mathrm{d}v}$$

3. Il reste à effectuer une décomposition en éléments simples, c'est à dire trouver α, β, γ et δ tels que :

$$\begin{aligned} \frac{4v}{(1+v)^2(1+v^2)} &= \frac{\alpha}{1+v} + \frac{\beta}{(1+v)^2} + \frac{\gamma v+\delta}{1+v^2} \\ &= \frac{\alpha(1+v)(1+v^2)+\beta(1+v^2)+(\gamma v+\delta)(1+v)^2}{(1+v)^2(1+v^2)} \\ \frac{4v}{(1+v)^2(1+v^2)} &= \frac{(\alpha+\gamma)v^3+(\alpha+\beta+2\gamma+\delta)v^2+(\alpha+\gamma+2\delta)v+(\alpha+\beta+\delta)}{(1+v)^2(1+v^2)} \end{aligned}$$

Par identification $\begin{cases} \alpha+\gamma=0 \\ \alpha+\beta+2\gamma+\delta=0 \\ \alpha+\gamma+2\delta=4 \\ \alpha+\beta+\delta=0 \end{cases}$, on résout ce système :

$$\begin{cases} \alpha=-\gamma \\ \delta=2 \\ \beta+\gamma=-2 \\ -\gamma+\beta=-2 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha=0 \\ \beta=-2 \\ \gamma=0 \\ \delta=2 \end{cases}$$

c'est à dire :

$$\frac{4v}{(1+v)^2(1+v^2)} = \frac{-2}{(1+v)^2} + \frac{2}{1+v^2}$$

On peut achever le calcul de l'intégrale :

$$\begin{aligned} I &= -2\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}v}{(1+v)^2} + 2\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}v}{1+v^2} \\ &= 2\left[\frac{1}{1+v}\right]_1^{\sqrt{3}} + 2\big[\arctan v\big]_1^{\sqrt{3}} = \frac{2}{1+\sqrt{3}} - 1 + 2\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) \\ I &= \frac{2(\sqrt{3}-1)}{2} - 1 + \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

$$\boxed{I = \frac{\pi}{6} - 2 + \sqrt{3}}$$

Correction de l'exercice 4 ▲

1. On fixe $x > 0$, puis on fait l'intégration par parties suivante :

$$\begin{aligned} u(t) &= f(t) \quad &\text{et} \quad v'(t) &= \cos(xt) \\ u'(t) &= f'(t) & v(t) &= \frac{1}{x}\sin(xt) \end{aligned}$$

ce qui donne la relation :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t)\cos(xt)\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{f(t)\sin(xt)}{x}\right]_a^b - \frac{1}{x}\int_a^b f'(t)\sin(xt)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{f(b)\sin(xb)}{x} - \frac{f(a)\sin(xa)}{x} - \frac{1}{x}\int_a^b f'(t)\sin(xt)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

f étant de classe $\mathcal{C}^1$ (c'est à dire f et f' continues) sur le segment $[a,b]$, on peut affirmer que f et f' sont bornées sur $[a,b]$. Autrement dit :

$$\exists M_1, M_2 > 0,\ \ \forall x \in [a,b], \quad |f(x)| \leqslant M_1 \quad \text{et} \quad |f'(x)| \leqslant M_2$$

On peut donc effectuer les majorations suivantes :

$$\left|\frac{f(b)\sin(xb)}{x}\right| \leqslant \frac{M_1}{x}$$

ce qui prouve que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(b)\sin(xb)}{x} = 0$ (de même que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(a)\sin(xa)}{x} = 0$).

$$\left|\frac{1}{x}\int_a^b f'(t)\sin(xt)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{x}\int_a^b |f'(t)\sin(xt)|\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{x}\int_a^b M_2\,\mathrm{d}t = \frac{M_2(b-a)}{x}$$

ce qui prouve que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_a^b f'(t)\sin(xt)\,\mathrm{d}t = 0$. Finalement :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \int_a^b f(t)\cos(xt)\,\mathrm{d}t = 0}$$

2. On note $J_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(nt)}{\sin t}\,\mathrm{d}t$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

   (a) La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin(nt)}{\sin t}$ est continue sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ et se prolonge par continuité en 0 puisque :

   $$\frac{\sin(nt)}{\sin t} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{nt}{t} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{nt}{t} n$$

   On peut donc conclure à la convergence de l'intégrale :

   $$\boxed{\text{L'intégrale } J_n \text{ existe.}}$$

   (b) Calculons J_0, J_1, J_2 et J_3 :

   $$\begin{aligned} J_0 &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(0)}{\sin t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} 0\,\mathrm{d}t = 0 \\ J_1 &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{\sin t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} 1\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} \\ J_2 &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2t)}{\sin t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \frac{2\sin t\cos t}{\sin t}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{\pi/2} \cos t\,\mathrm{d}t = 2\big[\sin t\big]_0^{\pi/2} = 2 \end{aligned}$$

   Seul le calcul de J_3 est un peu plus compliqué puisqu'il s'agit de transformer l'expression de $\sin(3t)$:

   $$\begin{aligned} \sin(3t) &= \sin(2t)\cos t + \cos(2t)\sin t = 2\sin t\cos^2 t + \sin t\cos(2t) \\ &= \sin t(1+\cos(2t)) + \sin t\cos(2t) = \sin t(1 + 2\cos(2t)) \end{aligned}$$

   $$J_3 = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(3t)}{\sin t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} (1+2\cos(2t))\,\mathrm{d}t = \big[t + \sin(2t)\big]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}$$

   $$\boxed{J_0 = 0, \quad J_1 = J_3 = \frac{\pi}{2}, \quad J_2 = 2.}$$

   (c) Procédons au calcul à effectuer pour $n \geqslant 2$:

   $$\begin{aligned} J_n - J_{n-2} &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(nt) - \sin((n-2)t)}{\sin t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{2\cos((n-1)t)\sin t}{\sin t}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{\pi/2} \cos((n-1)t) \\ &= \frac{2\sin\left((n-1)\frac{\pi}{2}\right)}{n-1} \end{aligned}$$

Plus précisément, on peut distinguer n pair et n impair : $J_{2k+3} - J_{2k+1} = 0$, et :

$$J_{2k+2} - J_{2k} = \frac{2\sin\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right)}{2k+1} = \frac{2(-1)^k}{2k+1}$$

On conclut sur les valeurs de J_{2n} et J_{2n+1} à l'aide de télescopages :

$$J_{2n+1} = J_1 + \sum_{k=0}^{n-1}(J_{2k+3} - J_{2k+1}) = J_1 = \frac{\pi}{2}$$

$$J_{2n} = J_0 + \sum_{k=0}^{n-1}(J_{2k+2} - J_{2k}) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2(-1)^k}{2k+1}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad J_{2n+1} = \frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad J_{2n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2(-1)^k}{2k+1}}$$

(d) Commençons par transformer un peu l'expression suivante :

$$\begin{aligned} J_n - J_{n-1} &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(nt) - \sin((n-1)t)}{\sin t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{2\cos((n-1/2)t)\sin(t/2)}{\sin t}\,\mathrm{d}t \quad \text{avec } \sin t = 2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2} \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{\cos((n-1/2)t)}{\cos(t/2)}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

La fonction $t \mapsto \frac{1}{\cos(t/2)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, donc on peut utiliser le résultat de la question 1 (car $n - \frac{1}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$) :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}(J_n - J_{n-1}) = 0}$$

En particulier $\lim_{n\to+\infty}(J_{2k+1} - J_{2k}) = \lim_{n\to+\infty}(\frac{\pi}{2} - J_{2k}) = 0$. On en conclut que la suite (J_{2k}) converge et que :

$$\lim_{k\to+\infty} J_{2k} = \frac{\pi}{2}$$

Les suites J_{2k} et J_{2k+1} convergent vers la même limite $\frac{\pi}{2}$, on conclut donc :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} J_n = \frac{\pi}{2}}$$

(e) On a, comme conséquence de la question précédente :

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to+\infty} J_{2n} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2(-1)^k}{2k+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^k}{2k+1}$$

Il reste à isoler le nombre π pour obtenir l'égalité :

$$\boxed{\pi = 4\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}}$$

Correction de l'exercice 5 ▲

Partie I. Étude de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de la série $\sum(-1)^n a_n$.

1. (a) Calculons la différence :

$$a_{n+1} - a_n = \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n \left(\frac{1+t^2}{2} - 1\right) \mathrm{d}t = \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n \left(\frac{t^2-1}{2}\right) \mathrm{d}t$$

L'expression sous le signe intégrale est négative puisque :

$$\forall t \in [0,1], \quad \frac{t^2-1}{2} \leqslant 0$$

On en déduit que $a_{n+1} - a_n \leqslant 0$, autrement dit que :

$$\boxed{\text{La suite } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$$

(b) Pour tout entier n, la fonction $t \mapsto \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n$ est positive sur $[0,1]$, donc $a_n \geqslant 0$. Avec la question précédente, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante et minorée par 0, ce qui entraîne que :

$$\boxed{\text{La suite } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers une limite } \ell.}$$

(c) Très simplement, on écrit :

$$(0 \leqslant t \leqslant 1) \quad \Rightarrow \quad (0 \leqslant t^2 \leqslant t) \quad \Rightarrow \quad (1+t^2 \leqslant 1+t)$$

Ainsi pour tout $t \in [0,1]$, $1+t^2 \leqslant 1+t$ et $\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n \leqslant \left(\frac{1+t}{2}\right)^n$, et par conservation de l'inégalité par passage à l'intégrale :

$$\int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n \mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \left(\frac{1+t}{2}\right)^n \mathrm{d}t = \left[\frac{2}{n+1}\left(\frac{1+t}{2}\right)^{n+1}\right]_0^1$$

Soit après calculs :

$$0 \leqslant a_n \leqslant \frac{2}{n+1}\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

La limite de l'expression de droite est nulle, et le théorème des gendarmes donne la conclusion :

$$\boxed{\ell = \lim_{n\to+\infty} a_n = 0}$$

2. On se propose ici de calculer la somme de la série $\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n a_n$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

(a) Soit $t \in [0,1]$. On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique de raison différente de 1 :

$$\begin{aligned}\sum_{p=0}^{n} (-1)^p \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^p &= \frac{1 + (-1)^{n+1}\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{n+1}}{1 + \left(\frac{1+t^2}{2}\right)} \\ &= \frac{2 + 2(-1)^{n+1}\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{n+1}}{2+1+t^2}\end{aligned}$$

En simplifiant :

$$\boxed{\sum_{p=0}^{n} (-1)^p \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^p = \frac{2}{3+t^2} - (-1)^{n+1}\frac{2}{3+t^2}\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{n+1}.}$$

(b) Soit $t \in [0,1]$. Il est immédiat que $3+t^2 \geqslant 3$ et que $\frac{2}{3+t^2} \leqslant \frac{2}{3}$. D'où :

$$\frac{2}{3+t^2}\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{n+1} \leqslant \frac{2}{3}\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{n+1}$$

Le passage à l'intégrale entre 0 et 1 donne l'inégalité :

$$\boxed{\int_0^1 \frac{2}{3+t^2}\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{n+1} \mathrm{d}t \leqslant \frac{2}{3} a_{n+1}}$$

(c) Le changement de variable $t = \sqrt{3}u$ nous donne :

$$\int_0^1 \frac{2}{3+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{2}{3+3u^2}\sqrt{3}\,\mathrm{d}u = \frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$$

Enfin : $\displaystyle\int_0^1 \frac{2}{3+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\sqrt{3}}\big[\arctan u\big]_0^{1/\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{\pi}{6}.$

$$\boxed{\int_0^1 \frac{2}{3+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.}$$

(d) En utilisant la question 2a :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sum_{p=0}^{n}(-1)^p\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^p \mathrm{d}t &= \int_0^1 \frac{2}{3+t^2}\,\mathrm{d}t - (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{2}{3+t^2}\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{n+1}\mathrm{d}t \\ &= \frac{\pi}{3\sqrt{3}} - (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{2}{3+t^2}\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{n+1}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Or d'après la question 2b :

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{2}{3+t^2}\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{n+1}\mathrm{d}t \leqslant \frac{2}{3}a_{n+1}$$

et comme $a_{n+1} \to 0$, le théorème des gendarmes donne :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{2}{3+t^2}\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{n+1}\mathrm{d}t = 0$$

et finalement :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \sum_{p=0}^{n}(-1)^p\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^p \mathrm{d}t = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.}$$

(e) Considérons les sommes partielles :

$$\sum_{p=0}^{n}(-1)^p a_p = \sum_{p=0}^{n}(-1)^p\int_0^1\left(\frac{1-t^2}{2}\right)^p\mathrm{d}t = \int_0^1\sum_{p=0}^{n}(-1)^k\left(\frac{1-t^2}{2}\right)^p\mathrm{d}t$$

Le résultat de la question précédente prouve que :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{p=0}^{n}(-1)^p a_p = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

ce qui prouve la convergence de la série et donne sa somme :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}}$$

Partie II. Étude de la série entière $\sum a_n x^n$ et de sa somme.

1. Soit R le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$.

(a) On a vu dans la partie I que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n a_n$ est convergente, donc :

$$\boxed{R \geqslant 1}$$

(b) Soit $x > 1$ fixé.

i. Soit $n \in \mathbb{N}$. La relation de Chasles nous permet d'écrire :

$$\int_0^1 \left((1+t^2)\frac{x}{2}\right)^n \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \left((1+t^2)\frac{x}{2}\right)^n \mathrm{d}t + \int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^1 \left((1+t^2)\frac{x}{2}\right)^n \mathrm{d}t$$

puis, compte tenu du fait que la première intégrale est positive :

$$\boxed{\int_0^1 \left((1+t^2)\frac{x}{2}\right)^n \mathrm{d}t \geqslant \int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^1 \left((1+t^2)\frac{x}{2}\right)^n \mathrm{d}t}$$

ii. Rappelons que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n x^n = x^n \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n \mathrm{d}t = \int_0^1 \left((1+t^2)\frac{x}{2}\right)^n \mathrm{d}t$$

La question précédente entraîne l'inégalité :

$$a_n x^n \geqslant \int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^1 \left((1+t^2)\frac{x}{2}\right)^n \mathrm{d}t$$

Il reste à utiliser le fait que $\forall t \in [\frac{1}{\sqrt{x}}, 1]$, $1+t^2 \geqslant 1+\frac{1}{x}$:

$$a_n x^n \geqslant \int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^1 \left((1+\frac{1}{x})\frac{x}{2}\right)^n \mathrm{d}t$$

Le calcul donne :

$$\boxed{a_n x^n \geqslant \left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\frac{1+x}{2}\right)^n.}$$

Comme $x > 1$, on a aussi

$$\frac{1+x}{2} > 1 \quad \text{et} \quad \left(\frac{1+x}{2}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Le terme à droite de l'inégalité tend donc vers $+\infty$, ce qui entraîne que :

$$\lim_{n\to+\infty} a_n x^n = +\infty$$

Ceci prouve que :

$$\boxed{\text{Si } x > 1, \text{ la série } \sum a_n x^n \text{ diverge grossièrement.}}$$

(c) La question précédente a montré que $R \leqslant 1$. Comme par ailleurs $R \geqslant 1$ d'après la question 1, on en déduit :

$$\boxed{R = 1}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]-1,1[$ fixé. On définit sur $[0,1]$ la fonction g_x par $g_x(t) = 1 - x\dfrac{1+t^2}{2}$.

(a) La fonction g_x est dérivable sur $[0,1]$ et :

$$\forall t \in [0,1], \quad g_x'(t) = -tx$$

Le cas $x = 0$ est trivial, puisque g_0 est constante de valeur 1. Il y a donc deux cas principaux de figure pour le tableau de variations de g suivant le signe de x :

Cas $x < 0$:

t	0		1
$g_x'(t)$		$-$	
$g_x(t)$	$1-\frac{x}{2}$	$\nearrow$	$1-x$

Cas $x > 0$:

t	0		1
$g_x'(t)$		$-$	
$g_x(t)$	$1-\frac{x}{2}$	$\searrow$	1-x

(b) Si $x<0$, on a $1-\frac{x}{2}>0$, et si $x>0$, on a $1-x>0$. Dans les deux cas, on observe que la fonction g_x est strictement positive sur $[0,1]$. C'est encore vrai si $x=0$.
En résumé, la fonction $t\mapsto g_x(t)$ est continue et strictement positive sur $[0,1]$, ainsi :

$$\boxed{\text{La fonction } t\mapsto \frac{1}{g_x(t)} \text{ est définie et continue sur } [0,1].}$$

On remarque immédiatement que $\dfrac{1}{g_x(t)}=\dfrac{2}{2-x-xt^2}$. Par ailleurs, le fait que $\dfrac{1}{g_x}$ soit continue sur le segment $[0,1]$ nous permet d'affirmer qu'elle est bornée (et atteint ses bornes) sur $[0,1]$. Autrement dit :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Il existe une constante } K_x>0 \text{ telle que pour tout } t\in[0,1] :\\ \qquad\qquad \left|\dfrac{2}{2-x-xt^2}\right|=\left|\dfrac{1}{g_x(t)}\right|\leqslant K_x.\end{array}}$$

(c) Par ailleurs, constatons l'inégalité :

$$\left|\int_0^1 \frac{2}{2-x-xt^2}\left(\frac{x}{2}(1+t^2)\right)^{n+1}\mathrm{d}t\right|\leqslant \int_0^1\left|\frac{2}{2-x-xt^2}\right|\left(\frac{|x|}{2}(1+t^2)\right)^{n+1}\mathrm{d}t$$

et de par la conservation des inégalités par passage à l'intégrale :

$$\int_0^1\left|\frac{2}{2-x-xt^2}\right|\left(\frac{|x|}{2}(1+t^2)\right)^{n+1}\mathrm{d}t\leqslant K_x\int_0^1\left(\frac{|x|}{2}(1+t^2)\right)^{n+1}\mathrm{d}t$$

Enfin, en utilisant l'inégalité pour $t\in[0,1]$:

$$\left(\frac{|x|}{2}(1+t^2)\right)^{n+1}\leqslant\left(\frac{|x|}{2}(1+1^2)\right)^{n+1}=|x|^{n+1}$$

qui donne :

$$\int_0^1\left(\frac{|x|}{2}(1+t^2)\right)^{n+1}\mathrm{d}t\leqslant\int_0^1|x|^{n+1}\,\mathrm{d}t=|x|^{n+1}$$

on parvient finalement à établir que :

$$\boxed{\left|\int_0^1 \frac{2}{2-x-xt^2}\left(\frac{x}{2}(1+t^2)\right)^{n+1}\mathrm{d}t\right|\leqslant K_x|x|^{n+1}a_{n+1}.}$$

3. L'expression des sommes partielles peut s'exprimer comme suit :

$$\sum_{p=0}^n a_px^p=\sum_{p=0}^n\int_0^1\left((1+t^2)\frac{x}{2}\right)^n\mathrm{d}t=\int_0^1\left(\sum_{p=0}^n\left((1+t^2)\frac{x}{2}\right)^n\right)\mathrm{d}t$$

Ceci permet de reconnaître la somme des termes d'une suite géométrique de raison $(1+t^2)\dfrac{x}{2}\neq1$ car pour $t\in[0,1]$ et $x\in]-1,1[$ on a :

$$\left|(1+t^2)\frac{x}{2}\right|=(1+t^2)\frac{|x|}{2}\leqslant|x|<1$$

ceci entraîne donc que :

$$\sum_{p=0}^n a_px^p=\int_0^1\frac{1-\left((1+t^2)\frac{x}{2}\right)^{n+1}}{1-(1+t^2)\frac{x}{2}}\mathrm{d}t$$

En développant le dénominateur et en séparant l'expression en deux intégrales, on en déduit l'égalité :

$$\boxed{\sum_{p=0}^n a_px^p=\int_0^1\frac{2}{2-x-xt^2}\mathrm{d}t-\int_0^1\frac{2}{2-x-xt^2}\left(\frac{x}{2}(1+t^2)\right)^{n+1}\mathrm{d}t}$$

4. Le fait que $|x| < 1$ prouve que $|x|^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On a d'autre part déjà établi en partie I que la suite (a_n) tend vers 0. On peut en déduire :
$$\lim_{n\to+\infty} K_x|x|^{n+1}a_{n+1} = 0$$
L'inégalité de la question 2c prouve à l'aide du théorème des gendarmes que :
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{2}{2-x-xt^2}\left(\frac{x}{2}(1+t^2)\right)^{n+1} \mathrm{d}t = 0$$
Enfin, l'égalité de la question précédente nous fait conclure par passage à la limite en $+\infty$ que :
$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \int_0^1 \frac{2}{2-x-xt^2}\,\mathrm{d}t.}$$

Correction de l'exercice 6 ▲

Intégrale de Wallis

On pose pour $n \in \mathbb{N}$:
$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n \,\mathrm{d}t$$

1. Pour $n = 0$ et $n = 1$, on a :
$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^0 \,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}, \qquad \text{et} \qquad I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \,\mathrm{d}t = [-\cos t]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$
On a donc :
$$\boxed{I_0 = \frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad I_1 = 1}$$

2. Déterminons le sens de variation de la suite (I_n). Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} ((\sin t)^{n+1} - (\sin t)^n)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n(\sin t - 1)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$
De plus pour $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, on a $\sin t - 1 \leqslant 0$ et $(\sin t)^n \geqslant 0$, donc $(\sin t)^n(\sin t - 1) \leqslant 0$, et avec la conservation des inégalités par intégration : $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$.
$$\boxed{\text{La suite } (I_n) \text{ est décroissante.}}$$

3. Soit $n \geqslant 2$. On va essayer de déterminer une relation de récurrence entre I_n et I_{n-2}. On remarque tout d'abord que :
$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{n-2} \sin^2 t \,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{n-2}(1 - \cos^2 t)\,\mathrm{d}t$$
Donc $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{n-2}\,\mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{n-2}\cos^2 t\,\mathrm{d}t$. On retrouve I_{n-2} et, par une intégration par parties, en posant :
$$\begin{aligned} u(t) &= \cos t & \text{et} \quad v'(t) &= (\sin t)^{n-2}\cos t \\ u'(t) &= -\sin t & v(t) &= \frac{1}{n-1}(\sin t)^{n-1} \end{aligned}$$
on a alors :
$$\begin{aligned} I_n &= I_{n-2} + \left[\frac{\cos t(\sin t)^{n-1}}{n-1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{n-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n \,\mathrm{d}t \\ &= I_{n-2} + \frac{1}{n-1} I_n \end{aligned}$$
En regroupant, on retrouve l'expression de I_n en fonction de I_{n-2}, plus précisément $\frac{n}{n-1}I_n = I_{n-2}$ et :
$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}}$$

4. D'après la question précédente, pour $i \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$I_{2i} = \frac{2i-1}{2i} I_{2i-2}, \quad \text{et} \quad \frac{I_{2i}}{I_{2i-2}} = \frac{2i-1}{2i}$$

Donc par un télescopage :

$$\frac{I_{2k}}{I_0} = \prod_{i=1}^{k} \frac{I_{2i}}{I_{2i-2}} = \prod_{i=1}^{k} \frac{2i-1}{2i} = \frac{(2k-1)\times(2k-3)\times\cdots\times 1}{2k\times(2k-2)\times\cdots\times 2}$$

On peut simplifier l'écriture de cette dernière expression à l'aide des factorielles :

$$\begin{aligned}\frac{(2k-1)\times(2k-3)\times\cdots\times 1}{2k\times(2k-2)\times\cdots\times 2} &= \frac{2k\times(2k-1)\times(2k-2)\times(2k-3)\times\cdots\times 2\times 1}{[2k\times(2k-2)\times\cdots\times 2]^2} \\ &= \frac{(2k)!}{[2^k\times k\times(k-1)\times\cdots\times 1]^2} = \frac{(2k)!}{(2^k k!)^2}\end{aligned}$$

Avec cette expression simplifiée, on peut donc écrire $I_{2k} = \dfrac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} I_0$, soit avec l'expression de I_0 trouvée à la question 1 :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \ \ I_{2k} = \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}\frac{\pi}{2}}$$

5. D'après la question 2, (I_n) est décroissante donc :

$$\forall n \geqslant 2, \ \ I_{n-2} \geqslant I_{n-1} \geqslant I_n$$

ce qui donne, avec la relation de la question 3 :

$$\forall n \geqslant 2, \ \ \frac{n}{n-1} I_n \geqslant I_{n-1} \geqslant I_n$$

On peut enfin diviser par I_n qui est une expression strictement positive, car $t \mapsto (\sin t)^n$ étant une fonction continue et strictement positive sur $]0; \frac{\pi}{2}]$, son intégrale sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ est strictement positive. Cette opération ne change donc pas le sens des inégalités :

$$\boxed{\forall n \geqslant 2, \ \ \frac{n}{n-1} \geqslant \frac{I_{n-1}}{I_n} \geqslant 1.}$$

Cet encadrement nous permet de conclure à l'aide du théorème des gendarmes, en remarquant que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n-1} = 1$:

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{I_{n-1}}{I_n} = 1}$$

6. On va montrer par récurrence qu'on a :

$$\forall n \geqslant 1, \ \ nI_nI_{n-1} = \frac{\pi}{2}.$$

— Pour $n = 1$, la relation est vraie d'après la question 1 car $I_0 I_1 = \dfrac{\pi}{2}$.

— Pour $k \in \mathbb{N}^*$ fixé, on suppose que $kI_kI_{k-1} = \dfrac{\pi}{2}$. Alors, en utilisant la relation de récurrence trouvée à la question 3, on a :

$$(k+1)I_{k+1}I_k = (k+1)\times\frac{k}{k+1}I_{k-1}I_k = kI_kI_{k-1}$$

L'hypothèse de récurrence nous permet ainsi de conclure que : $(k+1)I_{k+1}I_k = \dfrac{\pi}{2}$, ce qui prouve la relation au rang $k+1$.

— Par récurrence, la relation est donc vraie pour tout entier $n \geqslant 1$, c'est à dire :

$$\boxed{\forall n \geqslant 1, \ \ nI_nI_{n-1} = \frac{\pi}{2}}$$

7. La question 5 nous a permis d'établir que $I_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} I_n$, et donc que :

$$nI_nI_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} nI_n^2$$

Ces deux expressions ont donc la même limite, ce qui prouve grâce à la question qui précède que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} nI_n^2 = \frac{\pi}{2}}$$

et en tenant compte du fait que $I_n > 0$, on a $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}I_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

8. On peut alors appliquer ce résultat à la suite extraite (I_{2k}), ce qui donne grâce à la relation trouvée à la question 3 :

$$\lim_{k\to+\infty} \sqrt{2k}I_{2k} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \lim_{k\to+\infty} \sqrt{2k}\frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}\frac{\pi}{2}$$

Ainsi $\lim_{k\to+\infty} \sqrt{2k}\frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \times \frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$, et par passage à l'inverse :

$$\boxed{\lim_{k\to+\infty} \frac{2^{2k}(k!)^2}{\sqrt{2k}(2k)!} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \text{(Formule de Wallis)}}$$

Formule de Stirling

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = \frac{1}{2}\ln n + n\ln\frac{n}{e} - \ln(n!)$.

9. En effectuant le calcul, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{2}\ln(n+1) + (n+1)\ln\frac{n+1}{e} - \ln((n+1)!) - \frac{1}{2}\ln n - n\ln\frac{n}{e} + \ln(n!) \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + \ln\frac{n+1}{e} + n\ln\left(\frac{n+1}{e}\times\frac{e}{n}\right) - \ln\left(\frac{(n+1)!}{n!}\right) \end{aligned}$$

Soit après simplifications :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\frac{n+1}{e} + n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln(n+1) \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\frac{n+1}{e(n+1)} + n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \\ u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln(e) + n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

On peut maintenant effectuer un développement limité de l'expression lorsque $n \to +\infty$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1 + n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - 1 + n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \end{aligned}$$

En simplifiant ce dernier résultat en en déduit que, quand $n \to +\infty$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{12n^2} + o(\frac{1}{n^2}).$$

10. D'après la question précédente, la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ est convergente, car son terme général est équivalent à $\frac{1}{12n^2}$ qui est à un coefficient près celui d'une série de Riemann convergente. Or on sait (par télescopage) que la convergence de cette série est équivalente à la convergence de la suite (u_n). Donc :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est convergente.}}$$

11. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$:
$$w_n = \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \times \sqrt{n}}.$$
On constate que (w_n) est une suite de réels strictement positifs, et que :
$$\ln(w_n) = \ln(n!) - \ln\left(\left(\frac{n}{e}\right)^n\right) - \ln\sqrt{n} = \ln(n!) - n\ln\frac{n}{e} - \frac{1}{2}\ln(n)$$
Donc $\ln(w_n) = -u_n$ et $w_n = e^{-u_n}$. Or on sait d'après la question précédente que la suite (u_n) converge vers une limite ℓ, et que la fonction exp est continue, donc par composition des limites la suite (w_n) converge vers une limite L et :
$$L = \lim_{n\to+\infty} e^{-u_n} = e^{\ell} > 0$$
$$\boxed{\text{La suite } (w_n) \text{ converge vers une limite } L \text{ strictement positive.}}$$
12. Une suite extraite d'une suite qui converge converge vers la même limite, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} w_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = L$ et :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{w_n^2}{w_{2n}} = \frac{L^2}{L} = L$$
On a par ailleurs :
$$\frac{w_n^n}{w_{2n}} = \frac{(n!)^2}{\left(\frac{n}{e}\right)^{2n} \times n} \times \frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\sqrt{2n}}{(2n)!} = \frac{(n!)^2 \times 2^{2n} \times \sqrt{2}}{\sqrt{n} \times (2n)!}$$
En transformant l'expression, on peut utiliser la formule de Wallis :
$$\frac{w_n^n}{w_{2n}} = 2 \times \frac{2^{2n}(n!)^2}{\sqrt{2n}(2n)!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2 \times \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$
On a ainsi la valeur de L :
$$\boxed{L = \sqrt{2\pi}}$$
13. On conclut que, quand $n \to +\infty$:
$$\frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}} = \frac{w_n}{\sqrt{2\pi}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\pi}} = 1$$
Ce qui se reformule de la façon suivante :
$$\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}}$$

Correction de l'exercice 7 ▲

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :
$$u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{4 - x^2}\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad v_n = \int_0^{1/2} \frac{x^n}{1 - x^2}\,\mathrm{d}x$$

1. (a) Calculons $u_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{4 - x^2}\,\mathrm{d}x$. Une décomposition en éléments simples donne :
$$\frac{1}{4 - x^2} = \frac{1}{2 - x} + \frac{1}{2 + x} = \frac{1}{4(2 - x)} + \frac{1}{4(2 + x)}$$
ce qui permet de calculer l'intégrale :
$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{1}{4}\int_0^1 \left(\frac{1}{2 - x} + \frac{1}{2 + x}\right) \\ &= \frac{1}{4}\Big[-\ln(2 - x) + \ln(2 + x)\Big]_0^1 = \frac{\ln 3}{4} \end{aligned}$$

Pour le calcul de $u_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{4-x^2}\,\mathrm{d}x$, on peut directement utiliser une primitive :

$$u_1 = \left[-\frac{1}{2}\ln(4-x^2) \right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}$$

On a en résumé :

$$\boxed{u_0 = \frac{\ln 3}{4} \quad \text{et} \quad u_1 = \frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}}$$

(b) $u_{n+2} - 4u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n+2}-4x^n}{4-x^2} = \int_0^1 \frac{x^n(x^2-4)}{4-x^2} = -\int_0^1 x^n = -\frac{1}{n+1}.$

$$\boxed{u_{n+2} - 4u_n = -\frac{1}{n+1}}$$

En utilisant cette relation, on a :

$$u_2 = 4u_0 - 1 = \ln 3 - 1 \quad \text{et} \quad u_3 = 4u_1 - \frac{1}{2} = 2\ln\frac{4}{3} - \frac{1}{2}$$

Soit :

$$\boxed{u_2 = \ln 3 - 1 \quad \text{et} \quad u_3 = 2\ln\frac{4}{3} - \frac{1}{2}}$$

2. La fonction $x \mapsto \dfrac{x^n}{4-x^2}$ est continue, positive, et non identiquement nulle sur $[0,1]$. Son intégrale sur $[0,1]$ est donc strictement positive. Ainsi :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est strictement positive.}}$$

Par ailleurs, on constate que :

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

et l'expression sous l'intégrale étant négative sur $[0,1]$, on peut en déduire que $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$, c'est à dire que :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0. On peut conclure :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est convergente.}}$$

3. Pour tout $x \in [0,1]$, on a :

$$\frac{1}{4-x^2} \leqslant \frac{1}{3} \qquad \text{et} \qquad \frac{x^n}{4-x^2} \leqslant \frac{x^n}{3}$$

et avec la conservation des inégalités par passage à l'intégrale, on obtient :

$$0 < u_n \leqslant \frac{1}{3}\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3(n+1)}$$

Le théorème des gendarmes permet de conclure :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} u_n = 0}$$

4. Le changement de variable $x = 2t$ permet d'écrire pour $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{1/2} \frac{2^n t^n}{4-4t^2}(2\,\mathrm{d}t) = 2^{n-1}\int_0^{1/2} \frac{t^n}{1-t^2}\,\mathrm{d}t$$

C'est à dire :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^{n-1} v_n}$$

On en déduit que $v_n = \dfrac{1}{2^{n-1}} u_n$ et comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ on a :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = 0}$$

5. On pose, pour tout entier naturel n : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, et $S'_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$.

   (a) Pour tout $x \in [0,1]$, on a :
$$\frac{1}{4-x^2} \geqslant \frac{1}{4} \qquad \text{et} \qquad \frac{x^n}{4-x^2} \geqslant \frac{x^n}{4}$$
et avec la conservation des inégalités par passage à l'intégrale, on obtient :
$$u_n \geqslant \frac{1}{4}\int_0^1 x^n \,\mathrm{d}x = \frac{1}{4(n+1)}$$
La série $\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ est une série de Riemann divergente (vers $+\infty$), donc par comparaison des termes généraux, la série $\sum u_n$ diverge vers $+\infty$, autrement dit :
$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty}$$

   (b) On note R le rayon de convergence de la série $\sum u_n z^n$. On rappelle que :
$$R = \mathrm{Sup}\{r>0, \quad \sum u_n r^n < +\infty\} = \mathrm{Sup}\{r>0, \quad u_n r^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\}$$
Comme $\sum u_n$ diverge, on a $R \leqslant 1$, et comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a $R \geqslant 1$. D'où $R=1$:
$$\boxed{\text{Le rayon de convergence de la série } \sum u_n z^n \text{ est 1.}}$$
On remarque ensuite avec la question 4 que :
$$S'_n = \sum_{k=0}^{n} v_n = 2\sum_{k=0}^{n} \frac{u_n}{2^n}$$
La suite (S'_n) est de même nature que la série entière $\sum u_n z^n$ pour $z = \frac{1}{2} \in]-1,1[$. Ainsi :
$$\boxed{\text{La suite } (S'_n) \text{ converge.}}$$

   (c) On peut écrire, en utilisant la linéarité de l'intégrale :
$$S'_n = \sum_{k=1}^{n} \int_0^{1/2} \frac{x^n}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{1/2} \left(\frac{\sum_{k=1}^{n} x^n}{1-x^2}\right)\mathrm{d}x$$
Puis, compte tenu du fait que $\forall x \in [0,\frac{1}{2}]$, $\sum_{k=1}^{n} x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$:
$$S'_n = \int_0^{1/2} \frac{1-x^{n+1}}{(1-x^2)(1-x)}\,\mathrm{d}x$$
En séparant cette intégrale, on peut enfin écrire :
$$S'_n = \int_0^{1/2} \frac{1}{(1-x^2)(1-x)}\,\mathrm{d}x - \int_0^{1/2} \frac{x^{n+1}}{(1-x^2)(1-x)}\,\mathrm{d}x$$

   (d) Il s'agit maintenant de trouver $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in [1, \frac{1}{2}]$:
$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-x^2)(1-x)} &= \frac{\alpha}{1-x} + \frac{\beta}{(1-x)^2} + \frac{\gamma}{1+x} \\ &= \frac{(\gamma-\alpha)x^2 + (\beta-2\alpha)x + (\alpha+\beta+\gamma)}{(1-x^2)(1-x)}\end{aligned}$$

Par identification, on trouve $\alpha = \gamma = \frac{1}{4}$ et $\beta = \frac{1}{2}$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\int_0^{1/2} \frac{1}{(1-x^2)(1-x)}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{4}\int_0^{1/2}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{2}{(1-x)^2}+\frac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4}\left[-\ln(1-x)+\frac{2}{(1-x)}+\ln(1+x)\right]_0^{1/2} \\
\int_0^{1/2} \frac{1}{(1-x^2)(1-x)}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{4}\left(\ln 2+4+\ln\frac{3}{2}-2\right)
\end{aligned}$$

La valeur de l'intégrale est obtenue :

$$\boxed{\int_0^{1/2} \frac{1}{(1-x^2)(1-x)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}\ln 3}$$

(e) Pour $x \in [1, \frac{1}{2}]$, on a $\frac{1}{1-x} \leqslant \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$, d'où :

$$0 \leqslant \frac{x^{n+1}}{(1-x^2)(1-x)} \leqslant 2\frac{x^{n+1}}{1-x^2}$$

La conservation des inégalités par passage à l'intégrale donne enfin :

$$\boxed{0 \leqslant \int_0^{1/2} \frac{x^{n+1}}{(1-x^2)(1-x)}\,\mathrm{d}x \leqslant 2v_{n+1}}$$

(f) On a vu que $\lim_{n\to+\infty} v_{n+1} = 0$, donc d'après la question précédente et le théorème des gendarmes, on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{1/2} \frac{x^{n+1}}{(1-x^2)(1-x)}\,\mathrm{d}x = 0$$

L'expression obtenue à la question 5c et le calcul de la question 5d permettent de conclure :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S'_n = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}\ln 3}$$

Correction de l'exercice 8 ▲

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $W_n = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n\,\mathrm{d}t$.

1. On calcule immédiatement $W_0 = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$, et $W_1 = \int_0^{\pi/2} \cos t\,\mathrm{d}t = \left[\sin t\right]_0^{\pi/2} = 1$.

$$\boxed{W_0 = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad W_1 = 1}$$

2. (a) Étudions le signe de la différence :

$$W_{n+1} - W_n = \int_0^{\pi/2} \left[(\cos t)^{n+1} - (\cos t)^n\right]\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n(\cos t - 1)\,\mathrm{d}t$$

Or $\forall t \in [0, \pi/2]$, on a $(\cos t)^n(\cos t - 1) \leqslant 0$, et par passage à l'intégrale $W_{n+1} - W_n \leqslant 0$.

$\boxed{\text{La suite } (W_n) \text{ est décroissante.}}$

(b) Soit $n \geqslant 0$. La fonction $t \mapsto (\cos t)^n$ est continue, positive et non identiquement nulle sur $[0, \pi/2]$, donc son intégrale est strictement positive sur ce segment :

$$\boxed{W_n > 0}$$

3. (a) Soit $n \geqslant 0$: on sait que $W_{n+2} = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\cos t)^{n+2}\,\mathrm{d}t$. Effectuons l'intégration par parties :

$$\begin{array}{lcl} u(t) = (\cos t)^{n+1} & \text{et} & v'(t) = \cos t \\ u'(t) = -(n+1)\sin t(\cos t)^n & & v(t) = \sin t \end{array}$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} W_{n+2} &= \left[\sin t(\cos t)^{n+1}\right]_0^{\pi/2} + (n+1)\int_0^{\pi/2} \sin^2 t(\cos t)^n\,\mathrm{d}t \\ &= (n+1)\int_0^{\pi/2} (1-\cos^2 t)(\cos t)^n\,\mathrm{d}t \\ W_{n+2} &= (n+1)\int_0^{\pi/2} (\cos t)^n\,\mathrm{d}t - (n+1)\int_0^{\pi/2} (\cos t)^{n+2}\,\mathrm{d}t = (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2} \end{aligned}$$

En regoupant de la manière appropriée, on en déduit que :

$$\boxed{\text{Pour tout entier } n \text{ tel que } n \geqslant 0 : (n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n.}$$

(b) Montrons par récurrence que pour tout entier n tel que $n \geqslant 0$: $(n+1)W_{n+1}W_n = \dfrac{\pi}{2}$:

- ⋆ Pour $n = 0$, $(0+1)W_1W_0 = \dfrac{\pi}{2}$ d'après 1.
- ⋆ Soit n un entier naturel fixé. On suppose $(n+1)W_{n+1}W_n = \dfrac{\pi}{2}$. D'après la question précédente, on a :

$$(n+2)W_{n+2}W_{n+1} = (n+1)W_n \times W_{n+1} = \frac{\pi}{2}$$

Le résultat est donc vrai au rang $n+1$.

- ⋆ Par récurrence, le résultat est démontré pour tout entier naturel n.

$$\boxed{\text{Pour tout entier } n \text{ tel que } n \geqslant 0 : (n+1)W_{n+1}W_n = \frac{\pi}{2}.}$$

4. (a) La suite (W_n) étant décroissante d'après la question 2a, on a pour tout entier n :

$$W_n \geqslant W_{n+1} \geqslant W_{n+2}$$

Il reste à se souvenir d'après 3a que $W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}W_n$, et on obtient les inégalités :

$$\boxed{\text{Pour tout entier } n \text{ tel que } n \geqslant 0 : W_n \geqslant W_{n+1} \geqslant \frac{n+1}{n+2}W_n.}$$

(b) Sachant que $W_n > 0$, on peut reformuler ces inégalités :

$$1 \geqslant \frac{W_{n+1}}{W_n} \geqslant \frac{n+1}{n+2}$$

Avec $\dfrac{n+1}{n+2} = \dfrac{1+1/n}{1+2/n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Par le théorème des gendarmes on conclut que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{W_{n+1}}{W_n} = 1$. Autrement dit :

$$\boxed{W_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} W_n}$$

Ceci entraîne en particulier $W_{n+1}W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} W_n^2$, et comme on sait par ailleurs avec 3(b) ? que $W_{n+1}W_n = \dfrac{\pi}{2(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2n}$, on en déduit par la transitivité des équivalents :

$$W_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2n}$$

Les équivalents sont conservés par passage à la racine carrée, d'où :

$$\boxed{W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}}$$

5. Montrons par récurrence que pour tout entier n tel que $n \geqslant 0$: $W_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2}$.

   ⋆ C'est clair pour $n = 0$.

   ⋆ Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose $W_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2}$. D'après la question 3a, on a :

$$\begin{aligned}
W_{2n+2} &= \frac{2n+1}{2n+2}W_{2n} = \frac{2n+1}{2n+2} \times \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2} \\
&= \frac{2n+2}{2n+2} \times \frac{2n+1}{2n+2} \times \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2} = \frac{(2n+2)!}{2^2(n+1)^2 2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2} \\
W_{2n+2} &= \frac{(2n+2)!}{2^{2n+2}((n+1)!)^2}\frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

   et le résultat est ainsi démontré au rang $n+1$.

   ⋆ Par récurrence, le résultat est vrai pour tout entier n.

$$\boxed{\text{Pour tout entier } n \text{ tel que } n \geqslant 0 : W_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2}.}$$

On note pour tout entier n tel que $n \geqslant 1$: $A_n = \frac{1}{n!}n^n e^{-n}\sqrt{n}$.

On note pour tout entier n tel que $n \geqslant 2$: $a_n = -1 - \left(n - \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$.

6. Procédons à un développement limité afin de rechercher un équivalent de a_n :

$$\begin{aligned}
a_n &= -1 - \left(n - \frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\
&= -1 - \left(-1 - \frac{1}{2n} - \frac{1}{3n^2} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
a_n &= \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

   Il vient naturellement $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{12n^2} \geqslant 0$, et par équivalence avec le terme général d'une série de Riemann convergente :

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 2} a_n \text{ converge.}}$$

7. Remarquons ensuite que pour $n \geqslant 1$:

$$\begin{aligned}
\ln(A_n) &= \ln\left(\frac{1}{n!}n^n e^{-n}\sqrt{n}\right) = -\ln(n!) + \ln(n^n) + \ln(e^{-n}) + \ln(\sqrt{n}) \\
&= -\sum_{k=1}^{n}\ln(k) + (n + \frac{1}{2})\ln(n) - n
\end{aligned}$$

   et par suite pour $n \geqslant 2$:

$$\begin{aligned}
\ln(A_n) - \ln(A_{n-1}) &= -\sum_{k=1}^{n}\ln(k) + (n+\frac{1}{2})\ln(n) - n + \sum_{k=1}^{n-1}\ln(k) - (n-\frac{1}{2})\ln(n-1) + n - 1 \\
&= -\ln(n) + (n+\frac{1}{2})\ln(n) - (n-\frac{1}{2})\ln(n-1) - 1 \\
&= (n-\frac{1}{2})(\ln(n) - \ln(n-1) - 1 = -(n-\frac{1}{2})\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) - 1 = a_n
\end{aligned}$$

   On retrouve l'expression de a_n :

$$\boxed{\text{Pour tout entier } n \text{ tel que } n \geqslant 2 : a_n = \ln(A_n) - \ln(A_{n-1}).}$$

8. La suite $(\ln(A_n))$ et la série $\sum a_n$ sont de même nature. En effet, par un télescopage :

$$\sum_{k=2}^{n} a_k = \sum_{k=2}^{n} \left[\ln(A_k) - \ln(A_{k-1})\right] = \ln(A_n) - \ln(A_1)$$

On en déduit grâce à la question 6 que la suite $\big(\ln(A_n)\big)$ converge vers une limite α et par continuité de la fonction exp :

$$A_n = \exp\big(\ln(A_n)\big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{\alpha} > 0$$

Au final :

$$\boxed{\text{La suite } (A_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge et sa limite } \ell \text{ est strictement positive.}}$$

9. (a) D'après la question précédente, on a $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n!} n^n e^{-n}\sqrt{n}$ d'où, sachant que $\ell > 0$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{\ell} n^n e^{-n}\sqrt{n}}{n!} = 1$$

ce qui prouve que :

$$\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\ell} n^n e^{-n}\sqrt{n}}$$

(b) L'équivalent qui précède se combine avec le résultat de la question 5 :

$$W_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\frac{1}{\ell}(2n)^{2n}e^{-2n}\sqrt{2n}}{2^{2n}\left(\frac{1}{\ell}n^n e^{-n}\sqrt{n}\right)^2}\frac{\pi}{2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\frac{1}{\ell}2^{2n}n^{2n}e^{-2n}\sqrt{2}\sqrt{n}}{2^{2n}\frac{1}{\ell^2}n^{2n}e^{-2n}n}\frac{\pi}{2}$$

En simplifiant on a $W_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ell}{\sqrt{2n}}\pi$, et de plus, avec la question 4b, on a :

$$W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \quad \text{donc} \quad W_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{4n}}$$

Ensuite, par transitivité des équivalents, on a :

$$\frac{\ell}{\sqrt{2n}}\pi \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{4n}} \quad \text{et} \quad \ell = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{2n}}{\pi} \times \sqrt{\frac{\pi}{4n}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

On trouve ainsi la valeur de ℓ :

$$\boxed{\ell = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}}$$

Cette valeur, substituée dans l'expression de la question 9a, nous donne la formule de Stirling :

$$\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{\sim} n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}.}$$