Logique 3 : Assertions et démonstrations

I. Opérations sur les assertions

Soient A et B deux assertions. On peut créer d'autres assertions à partir de celles-ci :

A \ B	V	F
V		
F		

Conjonction : A ET B.

A \ B	V	F
V		
F		

Disjonction : A OU B.

A \ B	V	F
V		
F		

Implication : $A \Rightarrow B$.

A \ B	V	F
V		
F		

Équivalence : $A \iff B$.

Exemples 1.

- $2 > 0$ ET $1 > 2$ est ...
- $2 > 0$ OU $1 > 2$ est ...
- $\forall x \in [-1, 1], x \geq -1$ ET $x \leq 1$ est ...
- 2 est pair OU 4 est pair est ...
- $\forall a, b \in \mathbb{R}, a = b \Rightarrow a^2 = b^2$ est ...
- $\forall a, b \in \mathbb{R}, a = b \iff a^2 = b^2$ est ...
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, (x \leq y$ ET $y \leq z) \Rightarrow x \leq z$ est ...
- $x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$ est ...
- $2^2 = 5 \Rightarrow \pi = 0$ est ...
- $\forall x, y \in \mathbb{R}, xy = 0 \iff x = 0$ OU $y = 0$ est ...

Application 1.

1. Décrire les ensembles :
   (a) $E_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid (x > 0$ ET $x < 1)$ OU $x = 4\}$
   (b) $E_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3$ ET $x < 5$ ET $x \neq 4\}$
   (c) $E_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid (x \leq 0$ ET $x > 1)$ OU $x = 4\}$
2. Compléter avec $\iff$, $\Leftarrow$ ou $\Rightarrow$:
   (a) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 = 4 \ldots x = 2$
   (b) $\forall z \in \mathbb{C}, z = -\overline{z} \ldots z \in i\mathbb{R}$
   (c) $\forall x \in \mathbb{R}, x = \dfrac{\pi}{2} \ldots \mathrm{e}^{4ix} = 1$
3. On considère A : « m et n sont deux entiers pairs » et B : « $m + n$ est un entier pair ».
   A-t-on $A \Rightarrow B$? $B \Rightarrow A$? $A \iff B$? Justifier.

On peut ensuite composer les opérations :

Proposition 1.

- NON(A OU B) *est équivalent à ...*
  Par exemple : NON($x \leq 1$ OU $x^2 > 2$) $\iff$ ...
- NON(A ET B) *est équivalent à ...*
  Par exemple : NON($x \in [1, 2]$) $\iff$ ...
  NON($x = 0$ ET $y = 0$) $\iff$ ...
- NON(NON A) *est équivalent à ...*
- A ET(NON A) *est toujours FAUX.*
  Par exemple : $x \leq 1$ ET $x > 1$ *est FAUX.*
- A OU(NON A) *est toujours VRAI.*
  Par exemple : $x \leq 1$ OU $x > 1$ *est VRAI.*

- $A \Rightarrow B$ *est équivalent à* $(\text{NON}\,B) \Rightarrow (\text{NON}\,A)$.
  Par exemple : $x^2 \geq 100 \Rightarrow x \geq 10 \iff \ldots$
  f *est dérivable* $\Rightarrow f$ *est continue* $\iff \ldots$
- $\text{NON}(A \Rightarrow B)$ *est équivalent à* A ET$(\text{NON}\,B)$.
  Par exemple : $\text{NON}(\forall x, y \in \mathbb{R}, x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)) \iff \ldots$

Application 2. 1. Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Écrire avec des quantificateurs les assertions suivantes puis leur négation.

(a) La fonction f est décroissante sur I.
(b) La fonction f est de signe constant sur I.
(c) La suite (u_n) est constante.
(d) La suite (u_n) est croissante.
(e) La suite (u_n) est majorée.
(f) La fonction f est périodique.

2. Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Écrire la négation des assertions suivantes :

(a) $1 \leq x < y$
(b) $(x^2 = 1) \Rightarrow (x = 1)$
(c) $x \geq 1 \iff y < 1$

II. Méthodes usuelles de démonstration

II.1. Preuves liées aux quantificateurs

Pour démontrer une assertion $\exists x \in E, A(x)$, il faut construire/trouver un élément x de E tel que $A(x)$ soit VRAI.

Exemple 2. La proposition $\exists x \in \mathbb{R} \mid x - 6 = \sqrt{x}$ est vraie. En effet, trouvons un x qui convient :

- si x convient, alors ...

- vérification :

Pour démontrer une assertion $\forall x \in E, A(x)$, on écrit :
« Fixons $x \in E$.
......
Donc $A(x)$ est vraie.
Ainsi $\forall x \in E, A(x)$ est vraie. »

Exemple 3. Montrons que $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 2x + 3 \geq 2$.
Prenons $x \in \mathbb{R}$. Alors, sous forme canonique, on obtient $x^2 - 2x + 3 = \ldots$
Donc ...
Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 2x + 3 \geq 2$.

Remarque 1. Pour démontrer qu'une assertion $\forall x \in E, A(x)$ est fausse, il suffit de trouver un $x \in E$ tel que $A(x)$ est fausse. C'est un contre-exemple.

Exemple 4. L'assertion $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x \geq 0$ est fausse car ...

Application 3. Dans chacun des cas, dire si l'assertion est vraie puis le démontrer :

1. $\exists f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x)f(y)$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} \mid y \geq x^2$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \leq 2$
4. Il existe un entier naturel plus grand que tous les autres.

II.2. Pour montrer une implication

II.2.1 Méthode directe

La rédaction est la suivante :
« Supposons que A est vraie. Alors.....
Donc B est vraie.
Ainsi $A \Rightarrow B$ est vraie. »

Exemple 5. Montrons que : $\forall x \in \mathbb{R}, x > 0 \Rightarrow \ln(1 + x^2) > 0$.
Prenons $x \in \mathbb{R}$ et supposons que $x > 0$. Alors ....
Donc $\ln(1 + x^2) > 0$.
Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}, x > 0 \Rightarrow \ln(1 + x^2) > 0$.

Remarque 2. Pour montrer que l'assertion $A \Rightarrow B$ est fausse, il faut voir que A est vraie mais B est fausse.

Exemple 6. L'assertion $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$ est fausse car ...

Application 4. Dans chacun des cas suivants, dire si l'assertion est vraie ou fausse puis le démontrer :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, x < 2 \Rightarrow x^2 < 4$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \leq x \Rightarrow x = |x|$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x = 0$ et $y = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 0$
4. $\forall n \in \mathbb{N}, n$ est pair $\Rightarrow n^2$ est pair.

II.2.2 Méthode par contraposée

On utilise que $(A \Rightarrow B) \iff ((\text{NON}\, B) \Rightarrow (\text{NON}\, A))$.

On rédige donc comme suit :
« Supposons que $(\text{NON}\, B)$ est vraie. Alors.....
Donc NON A est vraie.
Par contraposée, $A \Rightarrow B$ est vraie. »

Exemple 7. Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}, n^2$ est pair $\Rightarrow n$ est pair.
Prenons $n \in \mathbb{N}$ et supposons que ....

Par contraposée, $\forall n \in \mathbb{N}, n^2$ est pair $\Rightarrow n$ est pair.

Application 5. Montrer par la contraposée que : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 = 0 \iff x = 0$ et $y = 0$.

II.3. Démonstration par l'absurde

On suppose le contraire de ce qu'on veut démontrer pour aboutir à quelque chose de toujours FAUX.

On rédige ainsi :
« Supposons par l'absurde que NONA est vraie. Alors.....
On aboutit donc à une contradiction.
Ainsi A est vraie. »

Exemple 8. Montrons que $\forall a, b \in \mathbb{R}^+, \dfrac{a}{1+b} = \dfrac{b}{1+a} \Rightarrow a = b$.
Supposons par l'absurde que : ...

Ceci est une contradiction.
Ainsi $\forall a, b \in \mathbb{R}^+, \dfrac{a}{1+b} = \dfrac{b}{1+a} \Rightarrow a = b$.

Application 6. Montrer par l'absurde que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{n^2+1}$ n'est pas un entier.

II.4. Démonstration par récurrence

Voir fiche L02.

II.5. Pour s'amuser !

Une bande de voleurs se réunit pour partager le butin du dernier larcin. Leurs noms sont Numéro 1, Numéro 2, etc... Le chef décide de la règle de répartition suivante :

- Numéro 1 propose une répartition entre les gredins : si la moitié, ou plus, des malfaiteurs est d'accord avec la répartition, elle est réalisée.
- Si la répartition est refusée, Numéro 1 ne reçoit rien et est exclu de la répartition. Numéro 2 propose à son tour une répartition entre les gredins restants, et est exclu si sa répartition n'est pas retenue.
- Ainsi de suite Numéro 3, 4, etc... proposent une répartition entre les restants, jusqu'à ce que la règle de la majorité permette d'aboutir.

Les gredins, dès qu'il s'agit d'argent, savent réfléchir. Il n'y a pas de collusion entre eux et chacun cherche à maximiser son gain. Il y a 150 pièces d'or. Vous êtes Numéro 1, quelle répartition proposez-vous si :

1. il y a 2 gredins ?
2. il y a 3 gredins ?
3. il y a 4 gredins ?
4. il y a 10 gredins ?