Compléments d'algèbre linéaire

Exercice 1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 - 3f^2 + 2f = 0$. On note :

$$F = \operatorname{Ker} f \quad ; \quad G = \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}_E) \quad ; \quad H = \operatorname{Ker}(f - 2\operatorname{Id}_E)$$

Montrer que $E = F \oplus G \oplus H$. [al065]

Exercice 2

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et p un projecteur de E.

1. Montrer que p est un projecteur de E si et seulement si $\operatorname{Id} - p$ est un projecteur de E.
2. Soient p_1, p_2 deux projecteurs tels que $p_1 \circ p_2 = 0$. On pose :

$$q = p_1 + p_2 - p_2 \circ p_1.$$

   (a) Montrer que q est un projecteur de E.

   (b) Établir les relations :

$$\operatorname{Ker} q = \operatorname{Ker} p_1 \cap \operatorname{Ker} p_2 \quad ; \quad \operatorname{Im} q = \operatorname{Im} p_1 + \operatorname{Im} p_2$$

[al066]

Exercice 3

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que :

$$g \circ f \circ g = g \quad \text{et} \quad f \circ g \circ f = f$$

Montrer que $\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} g = E$. [al067]

Exercice 4

Soit $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ \ x + y - t = 0 \text{ et } y - z + t = 0\}$. Montrer que E est un sev de $\mathbb{R}^4$, en donner une base puis déterminer un supplémentaire de E dans R^4. [al068]

Exercice 5

Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X],\ \ P(0) = P'(1) = 0\}$. Montrer que F est un sev de $R_3[X]$, en donner une base et trouver un supplémentaire de F dans $R_3[X]$. [al069]

Exercice 6

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, H un hyperplan de E, et F un sous-espace vectoriel de E non inclus dans H. Montrer :

$$\dim F \cap H = \dim F - 1$$

[al072]

Exercice 7

Soient $H_1, H_2, \ldots, H_k$ k hyperplans d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Montrer par récurrence que

$$\dim\big(H_1 \cap H_2 \cap \cdots \cap H_k\big) \geqslant n - k.$$

En déduire que l'intersection de $n-1$ hyperplans n'est jamais réduite à $\{0\}$. [a1070]

Exercice 8

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ et F un sous-espace vectoriel de E de dimension $k < n$. On note $(e_1, \ldots, e_k)$ une base de F, qu'on complète en une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n)$ de E.

Pour $i \geqslant k+1$, on note $H_i = \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, \hat{e_i}, \cdots, e_n)$ le sous-espace vectoriel engendré par les éléments de la base $\mathcal{B}$ privée de e_i.

1. Montrer que $F = \displaystyle\bigcap_{i=k+1}^{n} H_i$.
2. Application : donner un système d'équations cartésiennes de la droite de $\mathbb{R}^3$: $D = \mathrm{Vect}(1,1,1)$.

[a1071]

Exercice 9

Soient $F_1, \ldots, F_p$ p sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie. Montrer que :

$$\dim(F_1 + \cdots + F_p) \leqslant \dim F_1 + \cdots + \dim F_p$$

avec égalité si et seulement si la somme est directe. [a1073]

Exercice 10

Soit φ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ tel que pour tout $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, $\varphi(M) = \mathrm{tr}(AM)$. Généraliser le résultat à une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. [a1074]