Équations différentielles

Exercice 1

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles linéaires du premier ordre suivantes :

1. $y' + \tan(t)y = \sin(2t)$, avec $y(0) = 1$ sur $]-\pi/2, \pi/2[$.
2. $ty' - 2y = t^3$ sur $]0, +\infty[$ et $]-\infty, 0[$, puis sur $\mathbb{R}$.
3. $y' + 2y - (x+1)\sqrt{y} = 0$ en posant $z = \sqrt{y}$.

[ed012]

Exercice 2

On veut résoudre sur $]-1, +\infty[$ l'équation : $(t+1)y'' - y' - ty = e^{-t}$.

1. Vérifier que la fonction $t \mapsto e^t$ est solution de l'équation homogène.
2. En déduire les solutions de l'équation sur $]-1, +\infty[$ en se ramenant à une équation du premier ordre (méthode de Lagrange).

[ed013]

Exercice 3

On considère l'équation différentielle :

$$(\mathcal{E}) \quad x^2y''(x) + 4xy'(x) + 2y(x) = \ln(1+x)$$

1. Chercher les solutions de l'équation homogène sur $]0, +\infty[$ sous la forme $x \mapsto x^\alpha$.
2. Chercher une solution particulière de l'équation $(\mathcal{E})$ sous la forme d'une série entière.
3. En déduire les solutions globales de $(\mathcal{E})$ sur $]0, +\infty[$.

[ed014]

Exercice 4

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation : $(x^2+1)y'' + xy' - y = 0$.
On pourra chercher une solution évidente et utiliser la méthode de Lagrange. [ed015]

Exercice 5

On considère l'équation différentielle :

$$(\mathcal{E}) \quad x^2y''(x) - 3xy'(x) + 4y(x) = x^3$$

1. Chercher les solutions polynomiales de l'équation homogène.
2. En déduire les solutions globales sur $]0, +\infty[$.

[ed016]

Exercice 6

On considère l'équation différentielle $(\mathcal{E})$: $x^2y''(x) + 2xy'(x) + x^2y(x) = x$.

1. Chercher les solutions de l'équation homogène développables en série entière. Préciser l'intervalle I sur lesquelles ces solutions sont définies.
2. En déduire les solutions globales sur $]0, +\infty[$.

[ed017]

Exercice 7

On considère l'équation différentielle $(\mathcal{E})$: $x(x-1)y''(x) + 3xy'(x) + y(x) = 0$.

1. Chercher les solutions développables en série entière. Préciser l'intervalle I sur lesquelles ces solutions sont définies.
2. En déduire les solutions globales sur $]0,1[$.

[ed018]

Exercice 8

On considère l'équation différentielle $(E) : (1-x^2)y''(x) - xy'(x) + y(x) = 0, \quad x \in]-1,1[$.

1. Montrer qu'il existe un unique $t \in]-\pi/2, \pi/2[$ tel que $x = \sin(t)$.
2. On note z l'application deux fois dérivable vérifiant $z(t) = y(\sin t) = y(x)$. Exprimer à l'aide des applications z et z' les dérivées première et seconde de l'application y.
3. Montrer que l'application y est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle (E) si et seulement si l'application z est solution sur $]-1,1[$ d'une équation différentielle à préciser que l'on notera (H).
4. Résoudre (H). En déduire l'ensemble des solutions de (E).
5. Déterminer l'unique solution du système suivant :

$$\begin{cases} (1-x^2)y''(x) - xy'(x) + y(x) = 0, \quad x \in]-1,1[\\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

[ed019]

Exercice 9 **Équations différentielles linéaires du 3e ordre à coefficients constants**

On considère l'équation différentielle $(\mathcal{E}) : x''' - 2x'' - x' + 2x = 0$.

1. On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ x' \\ x'' \end{pmatrix}$. Écrire l'équation $(\mathcal{E})$ sous la forme d'un système :
$$X' = AX \text{ où } A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$
2. En déduire l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$.
3. Justifier sans calculs qu'il existe une unique solution qui vérifie $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$ et $x''(0) = -1$, puis la déterminer.
4. Appliquer cette méthode pour résoudre les équations suivantes :
   (a) $(\mathcal{E}') : x''' - 2x'' + x' - 2x = 0$, avec $x(0) = 1$, $x'(0) = 1$ et $x''(0) = -1$,
   (b) $(\mathcal{E}'') : x''' - x'' - x' + x = 0$, avec $x(0) = 1$, $x'(0) = 2$ et $x''(0) = -1$,

[ed020]
