Espaces préhilbertiens réels

Exercice 1

Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^m$ euclidien, on a :

$$2 + \|x+y\|^2 \leqslant 2\big(1+\|x\|^2\big)\big(1+\|y\|^2\big)$$

[ep041]

Exercice 2

1. Rappeler le calcul et la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$.
2. En utilisant le développement de $(k+1)^3$, en déduire $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$.
3. Déduire des résultats précédents que $n \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{k} \leqslant \frac{n(n+1)}{2\sqrt{3}}\sqrt{2n+1}$.

[ep040]

Exercice 3

Soit P un polynôme $P(t) = a_n t^n + \cdots + a_1 t + a_0$ à coefficients réels avec $a_n^2 + \cdots + a_1^2 + a_0^2 = 1$.

1. Justifier que $1 + t^2 + t^4 + \cdots + t^{2n} \leqslant \dfrac{1}{1-t^2}$ pour $t \in]0,1[$.
2. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 |P(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \pi/2$. On pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

[ep039]

Exercice 4

On note $\mathcal{C} = \mathcal{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$. Soit $h \in \mathcal{C}$.

Montrer que $\mathcal{C} = \mathrm{Vect}(h) \oplus \mathrm{Vect}(h)^\perp$ et que $\big(\mathrm{Vect}(h)^\perp\big)^\perp = \mathrm{Vect}(h)$. [ep010]

Exercice 5

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace préhilbertien E. Montrer que :

$$(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$$

$$F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$$

Que se passe-t-il en dimension finie ? [ep036]

Exercice 6

On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire canonique. Appliquer à la base $\{(1,0,-1),(1,-1,0),(0,1,-2)\}$ la méthode d'orthonormalisation de Schmidt. [ep014]

Exercice 7

On pose $E = \mathbb{R}^3$ que l'on munit du produit scalaire canonique. On note $P = \operatorname{Vect}(e_1, e_2)$ avec $e_1 = (1,2,3)$ et $e_2 = (0,1,2)$. Déterminer l'expression analytique de la projection orthogonale sur le plan P. Calculer la distance $d(A;P)$, où A est le point de coordonnées $(-1,2,1)$. `[ep015]`

Exercice 8 **Polynômes de Tchebychev**

On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire $(.\,|\,.)$ défini par

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}[X], \quad (P\,|\,Q) = \int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t,$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note T_n le polynôme de Tchebychev de première espèce, c'est à dire l'unique polynôme vérifiant :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$$

1. Exprimer T_0, T_1, T_2, T_3.
2. Vérifier que $(.\,|\,.)$ est bien un produit scalaire.
3. Montrer que $(T_n)_{n\geqslant 0}$ est une famille orthogonale de l'espace préhilbertien réel $\big(E, (.\,|\,.)\big)$.
4. Construire une famille orthonormale à partir de $(T_n)_{n\geqslant 0}$.
5. Soit $F = \operatorname{Vect}(1, X)$. En utilisant la projection orthogonale sur F, calculer $d(X^2, F)$.

`[ep016]`

Exercice 9

1. Montrer que $(P|Q) = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2)$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Calculer $d(X^2, P)$ où $P = \big\{\{aX + b \ / \ (a,b) \in \mathbb{R}^2\big\}$.

`[ep017]`

Exercice 10

Soit E un espace euclidien de dimension 4, $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_4})$ une base orthonormée de E, et F le sous-espace vectoriel d'équations dans $\mathcal{B}$:

$$\begin{cases} x + y + z + t &= 0 \\ x + 2y + 3z + 4t &= 0 \end{cases}$$

1. Trouver une base orthonormée de F.
2. Donner la matrice dans $\mathcal{B}$ de la projection orthogonale sur F.
3. Calculer $d(\overrightarrow{e_1}, F)$.

`[ep037]`

Exercice 11

Trouver le mininmum, pour $a, b \in \mathbb{R}$, des intégrales :

$$I(a,b) = \int_0^{\pi} \left(\sin x - ax - bx^2\right)^2 \mathrm{d}x$$

Indication : On pourra penser au projeté orthogonal de la fonction sin sur l'espace vectoriel $F = \operatorname{Vect}(x \mapsto x, x \mapsto x^2)$ pour le produit scalaire de $\mathcal{C}^0([0,\pi], \mathbb{R})$:

$$(f\,|\,g) = \int_0^{\pi} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

`[ep038]`