Espaces probabilisés

Exercice 1

Une urne contient 5 boules blanches et 7 rouges. On effectue 3 tirages d'une boule suivant la procédure suivante. A chaque tirage on prend une boule et on la remet dans l'urne en y ajoutant une boule de même couleur. Calculer les probabilités que l'échantillon de trois boules tirées contienne :

1. Aucune blanche.
2. Exactement une blanche.
3. Trois blanches.
4. Exactement deux blanches.

[pr037]

Exercice 2

Un individu est choisi au hasard dans une population comprenant 60 personnes honnêtes et 40 tricheurs. On lui fait tirer une carte d'un jeu de 52 cartes. Si c'est un tricheur, il retourne toujours un as.

1. Quelle est la probabilité que l'individu choisi retourne un as ?
2. Un individu a retourné un as. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'un tricheur ?
3. Un individu a retourné deux fois de suite un as. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'un tricheur ?

[pr038]

Exercice 3

Un sac contient 5 jetons blancs et 4 jetons noirs. On tire un à un et sans remise 3 jetons du sac.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir BNB dans cet ordre ? (deux méthodes)
2. Même question si les tirages on lieu avec remise.

[pr039]

Exercice 4

Statistiquement, on sait que 5 hommes sur 100 et 25 femmes sur 10000 sont daltoniens.

1. On choisit une personne au hasard. Quelle est la probabilité que cette personne soit daltonienne ?
2. La personne choisie est daltonienne. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'un homme ?

[pr040]

Exercice 5

Un distributeur de cafés A fonctionne correctement un jour sur deux (en moyenne). Un autre distributeur de cafés B fonctionne deux jours sur trois.

Le jour n°1, une personne choisit au hasard un des distributeurs A, B. Il décide d'utiliser le même distributeur le lendemain si celui-ci lui a donné un café correct, et de changer de distributeur sinon. Il procède de même les jours suivants.

On considère les évènements suivants ($n \in \mathbb{N}^*$) :

$$\begin{aligned} A_n &= \{\text{Le jour n, la personne utilise le distributeur } A\} \\ B_n &= \{\text{Le jour n, la personne utilise le distributeur } B\} \\ C_n &= \{\text{Le jour n, la personne boit un café correct}\} \end{aligned}$$

On note $p_n = P(A_n)$ et $q_n = P(C_n)$.

1. Trouver une relation entre p_{n+1} et p_n. Quelle est la nature de de la suite (p_n) ?
2. En déduire p_n en fonction de n.

3. Exprimer q_n en fonction de p_n. En déduire la probabilité de boire un café correct le jour n.

[pr041]

Exercice 6

Trois enfants jouent à la courte paille. Calculer la probabilité de tirer la courte paille pour le 1^{er}, le 2^{e}, le 3^{e} enfant. [pr042]

Exercice 7

Deux candidats A et B se présentent à une élection. Deux sondages ont révélé que l'électorat attendu de A se compose de 60% de femmes, celui de B de 45%. A est élu avec 55% des suffrages. On interroge au hasard un électeur au sortir de l'isoloir, c'est une femmes. Quelle est la probabilité qu'elle ait voté pour A ? [pr043]

Exercice 8

Une urne contient 6 boules blanches et 4 boules noires.

1. On tire au hasard et simultanément 5 boules de l'urne. Déterminer la probabilité que l'échantillon soit représentatif de l'urne, c'est à dire qu'il soit composé de 3 boules blanches et 2 boules noires.
2. Même question si les boules sont tirées une à une et sans remise.
3. Même question si les boules sont tirées une à une et avec remise.

[pr044]

Exercice 9

On dispose de deux dés A et B. Le dé A a quatre faces rouges et deux faces blanches. Le dé B a deux faces rouges et quatre faces blanches. On lance une pièce de monnaie telle que la probabilité d'obtenir pile soit de 1/3.
- si on obtient pile, on décide de jouer uniquement avec le dé A ;
- si on obtient face, on décide de jouer uniquement avec le dé B.

1. Calculer la probabilité d'obtenir rouge au premier coup.
2. On a obtenu rouge aux deux premiers coups. Calculer la probabilité d'obtenir rouge au troisième coup.
3. On a obtenu rouge aux n premiers coups ($n \in \mathbb{N}^*$). Calculer la probabilité p_n d'avoir utilisé le dé A.

[pr045]

Exercice 10

Un système peut être placé en n positions différentes notées $S_1, S_2, \dots, S_n$.

À chaque instant, il en occupe une et une seule. À chaque minute, la position est modifiée de manière aléatoire, mais de telle sorte que si l'on note X l'ancienne position et Y la nouvelle, $P_{(X=S_i)}(Y = S_j) = p_{i,j}$. On suppose que pour tout i, $P(X = S_i) \neq 0$.

On considère la matrice carrée (n, n), $M = (p_{i,j})$.

1. Montrer que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} p_{i,j} = 1$.
2. On note $u_i = P(X = Si)$ et $v_j = P(Y = Sj)$, puis $U = (u_1, u_2, \cdots, u_n)$ et $V = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ les vecteurs lignes associés.
3. Montrer que matriciellement, on a $V = UM$.

   En déduire une méthode simple pour calculer la probabilité que le système soit dans une position donnée au bout de p modifications.
4. Montrer que 1 est une valeur propre de M.

[pr046]

Exercice 11

Trois personnes nommées A, B, C lancent à tour de rôle la même pièce de monnaie ($ABCABCABC\ldots$). La probabilité d'obtenir pile lors d'un lancer est p ($0 < p < 1$). Le gagnant est le premier qui obtient pile (la partie s'arrête alors).

1. On note A_n (resp. B_n, C_n) l'évènement A gagne la partie lors du n-ième lancer (resp. B, C). Calculer $P(A_1), P(B_2), P(C_3)$. Les évènements A_1 et B_2 sont-ils indépendants ?
2. En discutant suivant les valeurs de n, calculer $P(A_n), P(B_n), P(C_n)$.
3. Calculer la probabilité de gagner de chacun des trois joueurs.
4. Quelle est la probabilité qu'il y ait un vainqueur ? Conclure.

[pr047]

Exercice 12

Soit Ω un univers. A, B et C trois évènements. Traduire en termes ensemblistes (en utilisant uniquement les symboles d'union, d'intersection et de passage au complémentaire, ainsi que A, B, C) les évènements suivants :

1. Seul A se réalise.
2. A et B se réalisent, mais pas C.
3. Les trois évènements se réalisent.
4. Au moins l'un des trois évènements se réalise.
5. Au moins deux des trois évènements se réalisent.
6. Aucun ne se réalise.
7. Au plus l'un des trois se réalise.
8. Exactement deux des trois se réalisent.

[pr001]

Exercice 13

Soit (Ω, P) un espace probabilisé. A et B deux évènements.

1. Si $P(A) = 0,9$ et $P(B) = 0,8$, montrer que $P(A \cap B) \geqslant 0,7$.
2. Montrer que pour tous évènements A et B : $P(A \cap B) \geqslant P(A) + P(B) - 1$.
3. Généraliser :

$$\forall A_1, \cdots, A_n \in \mathcal{P}(\Omega), \quad P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) \geqslant \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - (n-1)$$

[pr002]

Exercice 14

Deux amis footballeurs, Pierre et Paul, se livrent à une séance de pénaltys. La probabilité que Pierre marque lorsqu'il tire un pénalty est égale à 2/3, pour Paul elle est égale à 1/2. Chacun tire un pénalty à son tour, en commençant par Paul, et le premier qui marque a gagné. Quelle est la probabilité que Pierre gagne ? [pr003]

Exercice 15

Le gérant d'un magasin d'informatique a reçu un lot de boîtes de DVD. 5% des boîtes sont abîmées.
Le gérant estime que :

- 60% des boîtes abîmées contiennent au moins un DVD défectueux.
- 98% des boîtes non abîmées ne contiennent aucun DVD défectueux.

Un client achète une boîte du lot. On désigne par A l'évènement "la boîte est abîmée", et par D l'évènement "la boîte achetée contient au moins un DVD défectueux".

1. Donner les probabilités de $P(A), P(\overline{A}), P_A(D), P(\overline{D}|A), P(\overline{D}|\overline{A})$ et $P(D|\overline{A})$.
2. Le client constate qu'un des DVD acheté est défectueux. Quelle est la probabilité pour qu'il ait acheté une boîte abîmée ?

[pr004]