Fonctions de plusieurs variables réelles

Exercice 1

Résoudre, à l'aide d'un passage en coordonnées polaires $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ avec $(r, \theta) \in U =]0, +\infty[\times\left] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, l'équation d'inconnue $f :]0; +\infty[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suivante

$$(E) \quad x\frac{\partial f}{\partial x} = -y\frac{\partial f}{\partial y}$$

[pv050]

Exercice 2

Résoudre les équations aux dérivées partielles suivantes en utilisant les changements de variables proposés :

$$(1) \quad 3\frac{\partial f}{\partial x} - 2\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \begin{cases} u = x + y \\ v = 2x + 3y \end{cases} \qquad (2) \quad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = f \quad \begin{cases} u = x \\ v = y - x \end{cases}$$

$$(3) \quad y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y} = f \quad \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad (4) \quad x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

[pv061]

Exercice 3

Soit $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et F la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $F(x, y) = f(x + g(y))$. Justifier que F est de classe $\mathcal{C}^2$ et montrer que F satisfait l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \times \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} \times \frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

[pv062]

Exercice 4

On considère l'équation aux dérivées partielles

$$(E) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 5\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + 6\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 1$$

On fait le changement de variable : $u = y + \alpha x, v = y + \beta x$ et $\varphi(u, v) = f(x, y)$.

1. Déterminer une condition sur α et β pour que l'équation (E) soit équivalente à une équation du type $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v} = \lambda$.
2. En déduire les solutions de l'équation.

[pv063]

Exercice 5

Soit f la fonction définie par $f(x, y) = \dfrac{x + y}{(1 + x^2)(1 + y^2)}$ et $K = [0, 1]^2$.

1. Expliquer pourquoi f admet un maximum sur $\mathbb{K}$.
2. Chercher les extrema locaux de f sur l'intérieur $K' =]0, 1[^2$ de K.
3. Déterminer le maximum sur $[0, 1]$ des fonctions :

$$\varphi : t \mapsto f(t, 0) = f(0, t) \quad \text{et} \quad \psi : t \mapsto f(t, 1) = f(1, t)$$

   En déduire le maximum de f sur K.

Exercice 6

Soit $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, -1 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1\right\}$ et $f : D \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x,y) \in D, \quad f(x,y) = (y-x)^2 + 6xy$$

Montrer que f admet des extremums sur D et les déterminer. [pv052]

Exercice 7

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

Étudier l'existence d'extremums locaux et globaux de f dans $\mathbb{R}^3$. [pv053]

Exercice 8

Étudier les extremums locaux de la fonction $f : (x,y) \mapsto x^3 + 3xy^2 + 2y^3 + 3x^2$, puis ses extremums globaux sur le domaine $[-3;3]^2$. [pv054]

Exercice 9

Déterminer les extremums sur $\mathbb{R}^2$ de $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$. Montrer qu'il s'agit d'extremums globaux. [pv055]

Exercice 10

Soit $\alpha \in]0;1[$. On note $A = \{(x,y,z),\ \ x,y,z \geqslant 0 \text{ et } x+y+z = 1\}$. Déterminer les extremums sur A de la fonction

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & x^\alpha + y^\alpha + z^\alpha \end{array} \right.$$

[pv056]

Exercice 11

Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccl} [0,\pi]^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \to & \sin x + \sin y + \sin(x+y) \end{array} \right.$.

Trouver les extremums de cette fonction. [pv057]

Exercice 12

Trouver l'équation du plan tangent pour chaque surface ci-dessous, au point (x_0, y_0, z_0) donné :

1. $z = \sqrt{19 - x^2 - y^2}$, avec $(x_0, y_0, z_0) = (1,3,3)$.
2. $z = \sin(\pi xy) e^{2x^2 y - 1}$, avec $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1/2, 1)$.

[pv059]

Exercice 13

Trouver les points sur le paraboloïde $z = 4x^2 + y^2$ où le plan tangent est parallèle au plan $x + 2y + z = 6$. Même question avec le plan $3x + 5y - 2z = 3$. [pv060]