Intégration sur un intervalle quelconque

Exercice 1

Calculer les intégrales suivantes après avoir justifié leur existence :

$$\text{a) } \int_1^{+\infty} \frac{x}{x^3+1}\,\mathrm{d}x \quad \text{b) } \int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x \quad \text{c) } \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x}\,\mathrm{d}x$$
$$\text{d) } \int_0^1 \ln^2 t\,\mathrm{d}t \qquad \text{e) } \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t \qquad \text{f) } \int_0^{+\infty} \sin(t)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

[ig010]

Exercice 2

Étudier la convergence des intégrales suivantes.

$$\text{a) } \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{e^t}\,\mathrm{d}t \qquad \text{b) } \int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t \qquad \text{c) } \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2+\sin x}\,\mathrm{d}x$$

$$\text{d) } \int_0^1 \cos(\ln t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{e) } \int_0^1 \frac{t\ln t}{1-t}\,\mathrm{d}t \qquad \text{f) } \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}}{\ln(1+x^2)}\,\mathrm{d}x$$

[ig009]

Exercice 3

Étudier la convergence et la valeur des intégrales suivantes :

$$\text{a) } \int_1^{+\infty} \frac{1}{e^t-e^{-t}}\,\mathrm{d}t \quad \text{b) } \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{t(2-t)}}\,\mathrm{d}t \quad \text{c) } \int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t \quad (\text{poser } u=\sqrt{1-t})$$
$$\text{d) } \int_1^5 \sqrt{\frac{4x}{x-1}}\,\mathrm{d}x \qquad \text{e) } \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \qquad \text{f) } \int_0^{+\infty} \frac{x^5}{x^{12}+1}\,\mathrm{d}x$$

[ig011]

Exercice 4

Pour $n,k\in\mathbb{N}$, on pose $I_{n,k}=\displaystyle\int_0^1 x^k(\ln x)^n\,\mathrm{d}x$.

1. Justifier l'existence de $I_{n,k}$ (distinguer les cas $k\geqslant 1$ et $k=0$).
2. Montrer que $I_{n+1,k}=-\dfrac{n+1}{k+1}I_{n,k}$.
3. En déduire par récurrence que $I_{n,k}=\dfrac{(-1)^n n!}{(k+1)^{k+1}}$.

[ig047]

Exercice 5

On admet dans cet exercice le résultat suivant sur les intégrales de Wallis :

$$I_n=\int_0^{\pi/2}\cos^n\theta\,\mathrm{d}\theta \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

1. Montrer que $\forall x>-1$, $\ln(1+x)\leqslant x$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\forall x \in [0, n]$, $\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \leqslant e^{-x} \leqslant \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n}$.
3. En déduire que $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^n} \mathrm{d}t$.
4. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+u^2)^n} \mathrm{d}u$ existe et vaut I_{2n-2}.
5. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \mathrm{d}x$ existe et vaut $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

[ig012]

Exercice 6

On note $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} \mathrm{d}t$.

1. Pour quelles valeurs du réel x positif ou nul, l'intégrale $f(x)$ existe-t-elle ? On note D l'ensemble de ces valeurs.
2. (a) Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur D.
   (b) Calculer f' et en déduire les variations de la fonction f. Préciser les limites de f en 0 et $+\infty$.
3. (a) Avec une intégration par parties, établir la double inégalité :
$$\forall x \in D,\ \frac{e^{-x}}{x}\left(1 - \frac{1}{x}\right) \leqslant f(x) \leqslant \frac{e^{-x}}{x}.$$
   (b) En déduire un équivalent simple de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
4. (a) Justifier l'existence, pour tout réel x de l'intervalle $]0, 1[$, de l'intégrale $g(x) = \displaystyle\int_x^1 \frac{1 - e^{-t}}{t} \mathrm{d}t$.
   (b) Déterminer la limite $\displaystyle\lim_{t \to 0} \frac{1 - e^{-t}}{t}$, et en déduire l'existence de la limite de $g(x)$ quand x tend vers 0.
   (c) En déduire que $f(x) \underset{x \to 0}{\sim} -\ln x$, et donner l'allure de la courbe représentative de f.

[ig013]
