Séries entières

Exercice 1

Déterminer le rayon de convergence des séries suivantes :

1) $\sum \frac{n^n}{n!} z^n$ 2) $\sum n^\alpha z^n$ (où $\alpha \in \mathbb{R}$)

3) $\sum \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) z^n$ 4) $\sum \frac{n-5}{n^3+1} 4^n z^{2n}$

[se017]

Exercice 2

Calculer les rayons de convergence des séries entières $\sum a_n z^n$ suivantes :

$a_n = c(n)$ où $c(n)$ est le nombre de chiffres dans l'écriture décimale de n.

$a_n = n$ si n est un multiple de 3 ou de 5, et $a_n = 0$ sinon.

$a_n = (2 + (-1)^n)^n$. [se018]

Exercice 3

Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(2n)!}$. [se021]

Exercice 4

Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $S(x) = \displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{n^2}{(n-1)(n-2)} x^n$.

Indication : Écrire le coefficient sous la forme $\alpha + \dfrac{\beta n + \gamma}{(n-1)(n-2)}$, puis faire une décomposition en éléments simples.

[se043]

Exercice 5

Calculer le rayon de convergence et la somme des séries entières suivantes :

$$\sum (n^2+n+1)x^n \ ; \ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n+2} x^n \ ; \ \sum \frac{n^2}{n!} x^n \ ; \ \sum \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!}$$

[se026]

Exercice 6

Calculer les sommes des séries $\sum \dfrac{n^2+3n}{2^n}$ et $\sum \dfrac{n^2+(-1)^n}{3^n}$. [se027]

Exercice 7

On considère l'équation différentielle $y'' + xy' + y = 1$.

On cherche l'unique solution de cette équation vérifiant $y(0) = y'(0) = 0$.

1. Supposons qu'il existe une série entière $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de rayon de convergence strictement positif, solution de l'équation. Quelle relation de récurrence doit vérifier la suite (a_n) ?
2. Calculer explicitement a_n pour chaque n. Quel est le rayon de convergence de la série entière obtenue ?
3. Exprimer cette série entière à l'aide des fonctions usuelles.

[se025]

Exercice 8

On considère pour $x \in \mathbb{R}$ la somme, lorsqu'elle existe, $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{4n^2 - 1}$.

1. Donner le rayon de convergence R de la série.
2. Déterminer le développement en série entière au voisinage de 0 de $\arctan x$.
3. En déduire la somme $S(x)$ pour $x \in]-R, R[$.

[se020]

Exercice 9

Pour $x \in \mathbb{R}$ on donne la fonction S définie par une série entière $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$.

1. Donner le rayon de convergence R de cette série.
2. Justifier que S est solution sur $]-R, R[$ de l'équation différentielle $y'' + y' + y = e^x$.
3. En déduire l'expression de $S(x)$ pour $x \in]-R, R[$.

[se023]

Exercice 10

Montrer que les fonctions suivantes sont développables en série entière au voisinage de l'origine. Déterminer leurs développements ainsi que les rayons de convergence correspondants.

$$a)\quad \frac{1+x}{1-x} \qquad b)\quad \cos^2 x \qquad c)\quad \frac{1}{(1+x)(1+2x)} \qquad d)\quad e^x \cos x$$

$$f)\quad \arcsin x \qquad g)\quad \int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t, \quad \text{avec } \varphi(t) = \begin{cases} \frac{\ln(1+t)}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si t=0} \end{cases}$$

[se028]

Exercice 11

On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p} x^n$.

1. Donner le rayon de convergence de cette série.
2. Montrer que $(1-x)f'(x) = (p+1)f(x)$. En déduire l'expression de f.

[se042]

Exercice 12

Montrer que les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum |a_n| z^n$ ont même rayon de convergence. [se024]