Séries de Fourier

Note : On dit que f est développable en série de Fourier si pour tout réel t, $S_n(f)(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(t)$. Dans ce cas, le développement en série de Fourier de f est :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = a_o(f) + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[a_k(f)\cos(k\omega t) + b_k(f)\sin(k\omega t)\right]$$

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ de période 2π, impaire, et vérifiant :

$$f(t) = \frac{\pi - t}{2} \quad \text{sur }]0, \pi]$$

1. Justifier que f est développable en série de Fourier et former ce développement.
2. En déduire la convergence et la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n}$.
3. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

[sf006]

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ la fonction impaire, 2π-périodique, définie sur $[0, \pi]$ par :

$$f(t) = t(\pi - t)$$

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. Former le développement en série de Fourier de f. En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}$.
3. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^6}$ puis $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6}$.

[sf007]

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique, définie par $f(-\pi) = f(\pi) = 0$ et pour $x \in]-\pi, \pi[$:

$$f(x) = \cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}$$

1. Déterminer la série de Fourier de f. Justifier qu'elle converge vers f.
2. Calculer $\displaystyle\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{4p^2 - 1}$.

[sf008]

Exercice 4

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique, définie sur $]-\pi, \pi[$ par $f(-\pi) = f(\pi) = \pi^2$ et pour $x \in]-\pi, \pi[$:

$$f(x) = x^2 + \pi x$$

1. Montrer que f est développable en série de Fourier et déterminer ce développement.
2. En déduire $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.
3. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

[sf009]

Exercice 5

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ la fonction paire, 2π-périodique, définie sur $[0, \pi]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 4x^2 - \pi^2 & \text{si } x \in [0, \pi/2] \\ 8x\pi - 3\pi^2 - 4x^2 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer sa dérivée sur $[0, \pi]$.
2. Calculer les coefficients de Fourier de f.
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$.

[sf010]

Exercice 6

Soit $f \in \mathcal{C}_{m,T}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. On définit, pour $k \in \mathbb{Z}$, les coefficients de Fourier exponentiels de f par :

$$c_k(f) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \mathrm{e}^{-ik\omega t} f(t) \, \mathrm{d}t$$

1. Vérifier que $c_0 = a_0$, et que pour $k \geqslant 1$:
$$a_k = c_k + c_{-k} \quad \text{et} \quad ib_k = -c_k + c_{-k}$$
2. En déduire c_k et c_{-k} en fonction de a_k et b_k.
3. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$:
$$S_n(f)(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ik\omega t}$$
4. Application : On donne la fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ 2π-périodique définie par :
$$\forall x \in]-\pi, \pi], \quad f(x) = e^x$$
   (a) Calculer les coefficients de Fourier exponentiels de f.
   (b) En déduire la valeur des sommes $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$

[sf011]